Ejercicios de la sección 7.1

Ejercicio 1

a)	$\frac{7\pi}{36}$ radián	f)	$\frac{4\pi}{3}$ radián
b)	$\frac{\pi}{4}$ radián	g)	$\frac{2\pi}{5}$ radián
c)	$\frac{\pi}{9}$ radián	h)	$\frac{8\pi}{9}$ radián
d)	$\frac{7\pi}{4}$ radián	i)	$\frac{23\pi}{12}$ radián
e)	$\frac{3\pi}{2}$ radián	j)	$\frac{4\pi}{5}$ radián

Ejercicio 2

a)	15°	f)	126°
b)	60°	g)	340°
c)	288°	h)	225°
d)	150°	i)	85°
e)	75°	j)	252°

Ejercicio 3

Ángulo dado	Ángulo coterminal con medida entre 0° y 360°	Ángulo coterminal con medida entre 0° y –360°
1140°	**60°**	**–300°**
1155°	75°	–285°
945°	225°	–135°
1380°	300°	–60°
792°	72°	–288°

Ejercicio 4

Ángulo dado	Ángulo coterminal con medida entre 0° y 2π	Ángulo coterminal con medida entre 0° y -2π
5π	π	$-\pi$
$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{2}$
$\frac{29\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{-7\pi}{6}$
$\frac{-14\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{-2\pi}{3}$
$\frac{21\pi}{5}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{-9\pi}{5}$

Ejercicio 5

a) $\operatorname{sen}\theta = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$

$\cos\theta = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$

$\tan\theta = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$

b) Se debe obtener el valor del cateto opuesto al ángulo θ (llámele x); para lograrlo, se emplea el teorema de Pitágoras: $14^2 = 7^2 + x^2$, de donde se obtiene que $x = 7\sqrt{3}$. Así,

$\operatorname{sen}\theta = \frac{7\sqrt{3}}{14} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\theta = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$

$\tan\theta = \frac{7\sqrt{3}}{7} = \sqrt{3}$

c) Se debe encontrar el valor del cateto opuesto al ángulo θ (llámele x); para esto, se emplea el teorema de Pitágoras: $15^2 = 10^2 + x^2$, de donde se consigue que $x = 5\sqrt{5}$. Ahora,

$\operatorname{sen}\theta = \frac{5\sqrt{5}}{15} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\cos\theta = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

$\tan\theta = \frac{5\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

d) Se debe obtener el valor del cateto adyacente al ángulo θ (llámele x); para esto, también se utiliza el teorema de Pitágoras: $\left(\sqrt{34}\right)^2 = 5^2 + x^2$, de donde se deriva que $x = 3$. Ahora,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{5}{\sqrt{34}}$$

$$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

$$\tan\theta = \frac{5}{3}$$

e) $\operatorname{sen}\theta = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\cos\theta = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\tan\theta = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

Ejercicio 6

Primero, se determina el valor de la hipotenusa con el teorema de Pitágoras: $\text{hipotenusa}^2 = 15^2 + 36^2$. Así, se obtiene que la hipotenusa mide 39 u. l. Luego, se establecen las razones trigonométricas para los ángulos α y β:

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{36}{39} = \frac{12}{13}$	$\tan\alpha = \frac{36}{15} = \frac{12}{5}$	$\csc\alpha = \frac{39}{36} = \frac{13}{12}$
$\cos\alpha = \frac{15}{39} = \frac{5}{13}$	$\cot\alpha = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$	$\sec\alpha = \frac{39}{15} = \frac{13}{5}$

$\operatorname{sen}\beta = \frac{15}{39} = \frac{5}{13}$	$\tan\beta = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$	$\csc\beta = \frac{39}{15} = \frac{13}{5}$
$\cos\beta = \frac{36}{39} = \frac{12}{13}$	$\cot\beta = \frac{36}{15} = \frac{12}{5}$	$\sec\beta = \frac{39}{36} = \frac{13}{12}$

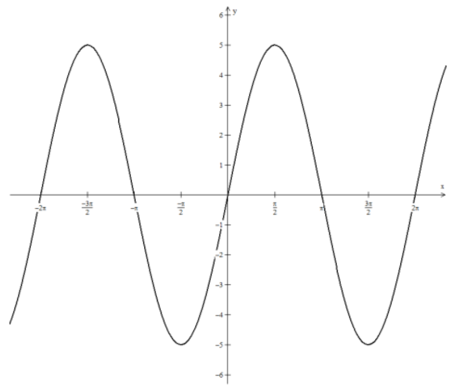
Ejercicios de la sección 7.2

Ejercicio 1

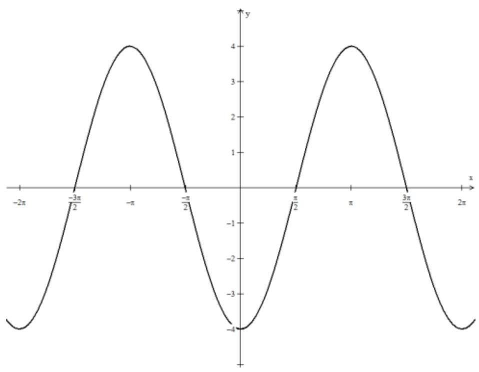
a) $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	f) $\left(-1,0\right)$
b) $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$	g) $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$
c) $\left(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	h) $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$
d) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$	i) $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$
e) $\left(0,-1\right)$	j) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Ejercicio 2

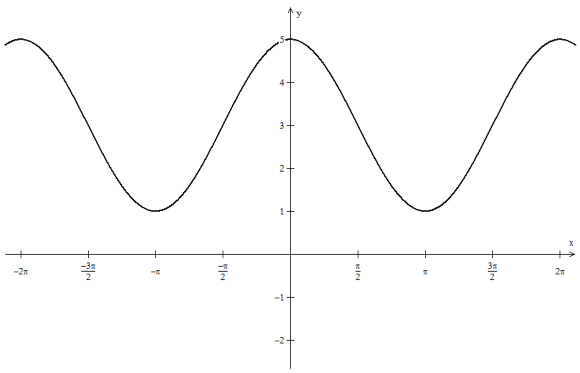
a) $f\left(x\right)=5\operatorname{sen}x$



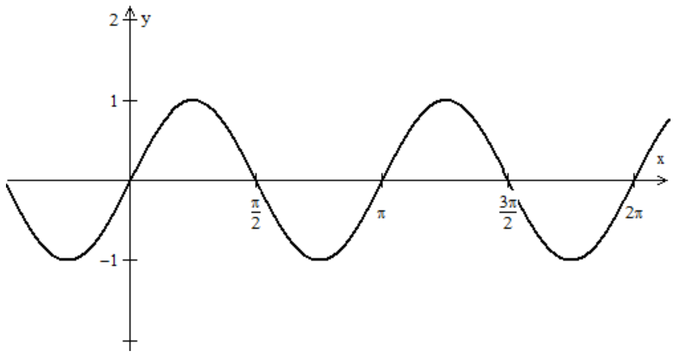
b) $f(x) = -4\cos x$



c) $f(x) = 2\cos x + 3$



d) $f(x) = \operatorname{sen} 2x$



Ejercicio 3

α	$\operatorname{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	indef
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	-1

$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$
π	0	–1	0

Ejercicio 4

α	$\operatorname{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{3\pi}{2}$	–1	0	indef
$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	–1
$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$
2π	0	1	0

Ejercicio 5

a) $\tan\alpha = \frac{1}{5}$	f) $\tan\alpha = -\sqrt{3}$
b) $\sec\alpha = \frac{3}{2}$	g) $\tan\alpha = \frac{-12}{5}$
c) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{-1}{3}$	h) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{-3}{5}$
d) $\cos\alpha = \frac{-4}{5}$	i) $\tan\alpha = \frac{-3}{4}$
e) $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$	j) $\cos\alpha = \frac{-\sqrt{10}}{10}$

Ejercicio 6

a) 0	f) $\frac{-1}{2}$	k) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $\frac{1}{2}$	g) 1	l) -1
c) $\frac{1}{2}$	h) 0	m) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$
d) $\frac{-1}{2}$	i) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$	n) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
e) $\frac{1}{2}$	j) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	o) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

p) 1	t) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$	x) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
q) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	u) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	y) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
r) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$	v) 0	z) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
s) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	w) -1	

Ejercicio 7

a) 1	e) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$	i) -2
b) $\frac{-2\sqrt{3}}{3}$	f) $\frac{\sqrt{3}}{3}$	j) -2
c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$	g) $\sqrt{2}$	k) 1
d) 2	h) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$	l) -2
		m) $-\sqrt{2}$

n) -1

o) 0

Ejercicio 8

a) $\frac{\pi}{3}$	f) $\frac{\pi}{2}$	k) $\frac{5\pi}{6}$
b) $\frac{\pi}{2}$	g) $\frac{\pi}{3}$	l) $\frac{\pi}{4}$
c) 0	h) $\frac{\pi}{6}$	m) $\frac{-\pi}{3}$
d) $\frac{-\pi}{3}$	i) $\frac{-\pi}{6}$	n) $\frac{\pi}{4}$
e) $\frac{2\pi}{3}$	j) $\frac{3\pi}{4}$	o) $\frac{2\pi}{3}$

Ejercicio 9

a) $$\frac{\tan x}{\sec x-1}+\frac{\tan x}{\sec x+1}=2\csc x$$

$$\begin{aligned}
\frac{\tan x}{\sec x-1}+\frac{\tan x}{\sec x+1}&=\frac{\tan x(\sec x+1)+\tan x(\sec x-1)}{(\sec x-1)(\sec x+1)}\\
&=\frac{\tan x\sec x+\tan x+\tan x\sec x-\tan x}{\sec^2 x-1}\\
&=\frac{2\tan x\sec x}{\tan^2 x}\\
&=\frac{2\sec x}{\tan x}\\
&=\frac{\frac{2}{\cos x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}\\
&=\frac{2}{\operatorname{sen} x}\\
&=2\csc x.
\end{aligned}$$

b) $$\sec x\csc x=\tan x+\cot x$$

$$\begin{aligned}
\tan x+\cot x&=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\\
&=\frac{\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x}{\cos x\operatorname{sen} x}\\
&=\frac{1}{\cos x\operatorname{sen} x}\\
&=\sec x\csc x.
\end{aligned}$$

c) $$\operatorname{sen} x\cos x=\frac{\tan x}{1+\tan^2 x}$$

$$\frac{\tan x}{1+\tan^2 x} = \frac{\tan x}{\sec^2 x}$$
$$= \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}$$
$$= \frac{\operatorname{sen} x \cos^2 x}{\cos x}$$
$$= \operatorname{sen} x \cos x.$$

d) $\cos(4x) = \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x - 6\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$

$$\cos(4x) = \cos(2\cdot 2x)$$
$$= \cos^2(2x) - \operatorname{sen}^2(2x)$$
$$= \left(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right)^2 - (2\operatorname{sen} x \cos x)^2$$
$$= \cos^4 x - 2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + \operatorname{sen}^4 x - 4\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$$
$$= \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x - 6\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x.$$

e) $\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x} + \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} = 2\sec x$

$$\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x} + \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} = \frac{\cos x(1+\operatorname{sen} x) + \cos x(1-\operatorname{sen} x)}{(1-\operatorname{sen} x)(1+\operatorname{sen} x)}$$
$$= \frac{\cos x + \cos x \operatorname{sen} x + \cos x - \cos x \operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen}^2 x}$$
$$= \frac{2\cos x}{\cos^2 x} = \frac{2}{\cos x} = 2\sec x.$$

f) $\cot x + \tan x + 1 = \frac{\cot x}{1-\tan x} + \frac{\tan x}{1-\cot x}$

$$\frac{\cot x}{1-\tan x}+\frac{\tan x}{1-\cot x}=\frac{\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{1-\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}+\frac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{1-\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}$$

$$=\frac{\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\dfrac{\cos x-\operatorname{sen} x}{\cos x}}+\frac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\dfrac{\operatorname{sen} x-\cos x}{\operatorname{sen} x}}$$

$$=\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x(\cos x-\operatorname{sen} x)}+\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x(\operatorname{sen} x-\cos x)}$$

$$=\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x(\cos x-\operatorname{sen} x)}-\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x(\cos x-\operatorname{sen} x)}$$

$$=\frac{\cos^3 x-\operatorname{sen}^3 x}{\operatorname{sen} x\cos x(\cos x-\operatorname{sen} x)}$$

$$=\frac{(\cos x-\operatorname{sen} x)(\cos^2 x+\operatorname{sen} x\cos x+\operatorname{sen}^2 x)}{\operatorname{sen} x\cos x(\cos x-\operatorname{sen} x)}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\operatorname{sen} x\cos x+\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x\cos x}$$

$$=\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x\cos x}+\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x\cos x}+\frac{\operatorname{sen} x\cos x}{\operatorname{sen} x\cos x}$$

$$=\cot x+\tan x+1.$$

g) $\csc(x+y)=\dfrac{\sec x\csc x\sec y\csc y}{\csc x\sec y+\sec x\csc y}$

$$\csc(x+y)=\frac{1}{\operatorname{sen}(x+y)}$$
$$=\frac{1}{\operatorname{sen}x\cos y+\operatorname{sen}y\cos x}$$
$$=\frac{1}{\operatorname{sen}x\cos y+\operatorname{sen}y\cos x}\div\frac{\operatorname{sen}x\cos y\operatorname{sen}y\cos x}{\operatorname{sen}x\cos y\operatorname{sen}y\cos x}$$
$$=\frac{\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}x}\cdot\frac{1}{\cos y}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}y}}{\frac{1}{\operatorname{sen}x}\cdot\frac{1}{\cos y}+\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}y}}$$
$$=\frac{\sec x\csc x\sec y\csc y}{\csc x\sec y+\sec x\csc y}.$$

h) $\cot x=\frac{\operatorname{sen}2x}{1-\cos 2x}$

$$\frac{\operatorname{sen}2x}{1-\cos 2x}=\frac{2\operatorname{sen}x\cos x}{1-\left(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x\right)}$$
$$=\frac{2\operatorname{sen}x\cos x}{1-\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}$$
$$=\frac{2\operatorname{sen}x\cos x}{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen}^2 x}$$
$$=\frac{2\operatorname{sen}x\cos x}{2\operatorname{sen}^2 x}$$
$$=\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}$$
$$=\cot x.$$

i) $\cos x\cos 2x\cos 4x=\frac{\operatorname{sen}8x}{8\operatorname{sen}x}$

$$
\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen} 8x}{8 \operatorname{sen} x} &= \frac{\operatorname{sen}(2 \cdot 4x)}{8 \operatorname{sen} x} \\
&= \frac{2 \operatorname{sen} 4x \cos 4x}{8 \operatorname{sen} x} \\
&= \frac{2 \cdot 2 \operatorname{sen} 2x \cos 2x \cdot \cos 4x}{8 \operatorname{sen} x} \\
&= \frac{4 \cdot 2 \operatorname{sen} x \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x}{8 \operatorname{sen} x} \\
&== \frac{8 \operatorname{sen} x \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x}{8 \operatorname{sen} x} \\
&= \cos x \cos 2x \cos 4x.
\end{aligned}
$$

Ejercicio 10

a) $$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \frac{\sec\theta}{\csc\theta} = \tan\theta + \frac{\dfrac{1}{\cos\theta}}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}} = \tan\theta + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = 2\tan\theta.$$

b) $$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta + \tan^2\theta = 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta.$$

c) $$\frac{\tan^2\theta + 1}{\cot^2\theta + 1} = \frac{\sec^2\theta}{\csc^2\theta} = \tan^2\theta.$$

d) $$\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta\tan\theta}{\sec\theta\csc\theta\cot\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta \cdot \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{1}{\cos\theta}\cdot\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}\cdot\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}} = \operatorname{sen}^4\theta.$$

e) $$\frac{\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta + \cos^3\theta - \cos\theta + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\cos\theta\left(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta\right) - \cos\theta + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \\
&= \frac{\cos\theta - \cos\theta + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \\
&= \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \\
&= \tan\theta.
\end{aligned}
$$

Ejercicio 11

a) $\tan x = 3\cot x$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \tan x - 3\cot x = 0 \\
&\Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \frac{3\cos x}{\operatorname{sen} x} = 0 \\
&\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}^2 x - 3\cos^2 x}{\cos x \operatorname{sen} x} = 0 \\
&\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x - 3\cos^2 x = 0 \\
&\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x - 3\left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right) = 0 \\
&\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x - 3 + 3\operatorname{sen}^2 x = 0 \\
&\Rightarrow 4\operatorname{sen}^2 x = 3 \\
&\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{3}{4} \\
&\Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}
$$

Finalmente, $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

b) $2\operatorname{sen} x = \tan x$

$\Rightarrow 2\operatorname{sen} x - \tan x = 0$

$\Rightarrow 2\operatorname{sen} x - \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0$

$\Rightarrow \dfrac{2\operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x} = 0$

$\Rightarrow 2\operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x = 0$

$\Rightarrow \operatorname{sen} x (2\cos x - 1) = 0.$

De lo anterior, se tiene que $\operatorname{sen} x = 0$ o $2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \dfrac{1}{2}$. Finalmente,

$S = \left\{0, \dfrac{\pi}{3}, \pi, \dfrac{5\pi}{3}\right\}$

c) $2\operatorname{sen}^2 x = 3 + 2\cos^2 x$

$\Rightarrow 2\operatorname{sen}^2 x - 3 - 2\cos^2 x = 0$

$\Rightarrow 2\operatorname{sen}^2 x - 3 - 2(1 - \operatorname{sen}^2 x) = 0$

$\Rightarrow 2\operatorname{sen}^2 x - 3 - 2 + 2\operatorname{sen}^2 x = 0$

$\Rightarrow 4\operatorname{sen}^2 x = 5$

$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \dfrac{5}{4}$

$\Rightarrow \operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{5}}{2}.$

Pero note que $\operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ no tiene solución, pues $\dfrac{\sqrt{5}}{2} \notin [-1,1]$. Finalmente,

$S = \{\ \}$

d) $9\csc^2 x = 4\tan^2 x$

$$\Rightarrow \frac{9}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{4\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$
$$\Rightarrow 9\cos^2 x = 4\operatorname{sen}^4 x$$
$$\Rightarrow 0 = 4\operatorname{sen}^4 x - 9\cos^2 x$$
$$\Rightarrow 0 = 4\operatorname{sen}^4 x - 9\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)$$
$$\Rightarrow 0 = 4\operatorname{sen}^4 x + 9\operatorname{sen}^2 x - 9.$$

De esta última ecuación, se obtiene que $\operatorname{sen}^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Se descarta $\operatorname{sen}^2 x = -3$, ya que esta ecuación carece de solución.

Finalmente, $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$.

e) $\operatorname{sen} 2x \cos x = \cos 2x \operatorname{sen} x$

$$\Rightarrow 2\operatorname{sen} x \cos x \cos x = \left(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right)\operatorname{sen} x$$
$$\Rightarrow 2\operatorname{sen} x \cos^2 x = \operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x$$
$$\Rightarrow \operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen} x \cos^2 x = 0$$
$$\Rightarrow \operatorname{sen} x\left(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x\right) = 0$$
$$\Rightarrow \operatorname{sen} x = 0.$$

Finalmente, $S = \{0, \pi\}$.

f) $\sqrt{2}\operatorname{sen} 4x - 1 = 0$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} 4x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Note que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ para $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ y $\alpha = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$. Si $\alpha = 4x$, se tiene que $x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}$. Para $k = 0,1,2,3$, las soluciones son

$S = \left\{\frac{\pi}{16}, \frac{3\pi}{16}, \frac{9\pi}{16}, \frac{11\pi}{16}, \frac{17\pi}{16}, \frac{19\pi}{16}, \frac{25\pi}{16}, \frac{27\pi}{16},\right\}$.

g) $\cot^2 x + \csc^2 x - 3 = 0$

$\Rightarrow \cot^2 x + 1 + \cot^2 x - 3 = 0$

$\Rightarrow 2\cot^2 x - 2 = 0$

$\Rightarrow \cot^2 x = 1$

$\Rightarrow \cot x = \pm 1.$

Finalmente, $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$.

h) $11 - 5\cos^2 x + 13\operatorname{sen} x = 0$

$11 - 5\cos^2 x + 13\operatorname{sen} x = 0$

$\Rightarrow 11 - 5\left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right) + 13\operatorname{sen} x = 0$

$\Rightarrow 11 - 5 + 5\operatorname{sen}^2 x + 13\operatorname{sen} x = 0$

$\Rightarrow 5\operatorname{sen}^2 x + 13\operatorname{sen} x + 6 = 0.$

Ahora, al hacer $y = \operatorname{sen} x$, se consigue la ecuación cuadrática $5y^2 + 13y + 6 = 0$, de donde deriva que $y = -2$ y $y = \frac{-3}{5}$.

Luego, la ecuación $y = -2 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -2$ no tiene solución. Por su parte, para $y = \frac{-3}{5} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{-3}{5}$, se puede encontrar un valor aproximado de x (en radianes) con la calculadora: $x \approx -0{,}6435$, pero note que $x \notin [0, 2\pi]$; entonces, se debe tomar 0,6435 como la medida del ángulo de referencia. Recuerde que la función seno es negativa en el tercer y cuarto cuadrante; de este modo, el conjunto solución es $S=\{\pi+0,6435;2\pi-0,6435\}$.

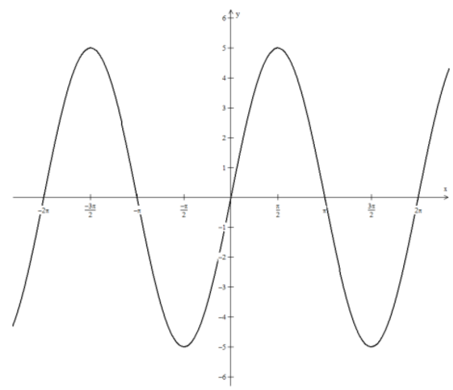
Ejercicios de la sección 7.2

Ejercicio 1

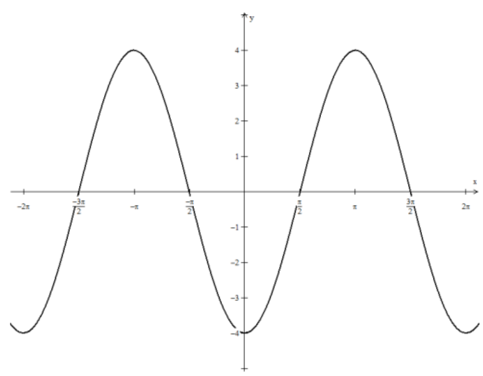
a) $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	f) $\left(-1,0\right)$
b) $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$	g) $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$
c) $\left(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	h) $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$
d) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$	i) $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$
e) $\left(0,-1\right)$	j) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Ejercicio 2

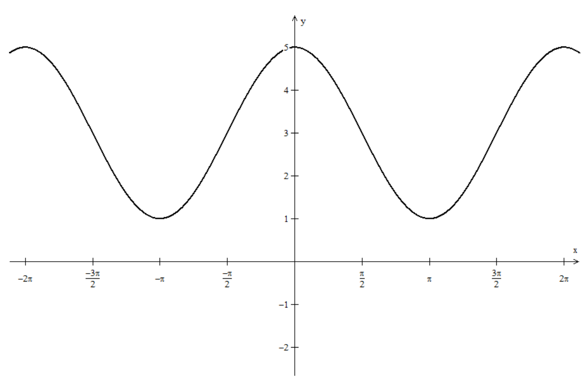
a)	$f\left(x\right)=5\operatorname{sen}x$



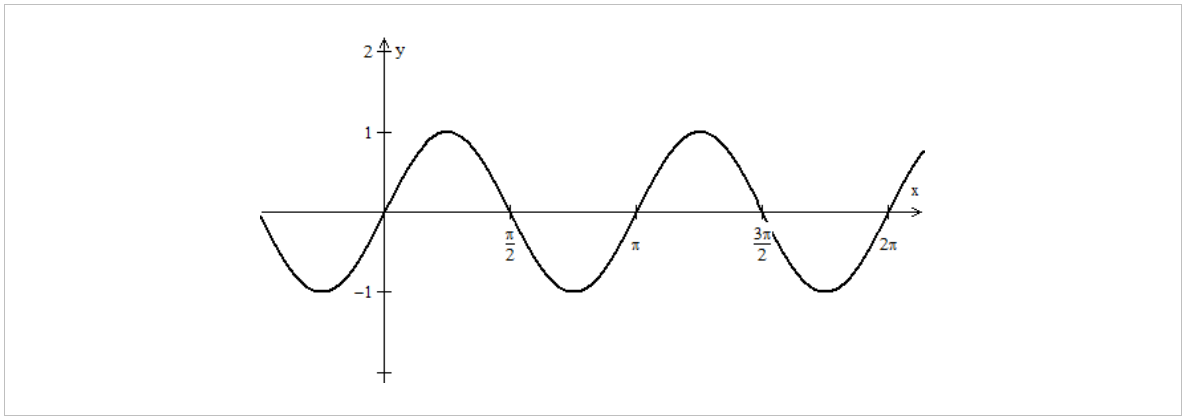
b) $f(x) = -4\cos x$



c) $f(x) = 2\cos x + 3$



d) $f(x) = \operatorname{sen} 2x$



Ejercicio 3

α	$\operatorname{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	indef
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	-1

$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$
π	0	-1	0

Ejercicio 4

α	$\operatorname{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	indef
$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$
2π	0	1	0

Ejercicio 5

a) $\tan\alpha=\frac{1}{5}$	f) $\tan\alpha=-\sqrt{3}$
b) $\sec\alpha=\frac{3}{2}$	g) $\tan\alpha=\frac{-12}{5}$
c) $\operatorname{sen}\alpha=\frac{-1}{3}$	h) $\operatorname{sen}\alpha=\frac{-3}{5}$
d) $\cos\alpha=\frac{-4}{5}$	i) $\tan\alpha=\frac{-3}{4}$
e) $\cos\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$	j) $\cos\alpha=\frac{-\sqrt{10}}{10}$

Ejercicio 6

a) 0	f) $\frac{-1}{2}$	k) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $\frac{1}{2}$	g) 1	l) -1
c) $\frac{1}{2}$	h) 0	m) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$
d) $\frac{-1}{2}$	i) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$	n) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
e) $\frac{1}{2}$	j) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	o) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

p) 1
q) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
r) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$
s) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

t) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$
u) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
v) 0
w) -1

x) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
y) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
z) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ejercicio 7

a) 1

b) $\frac{-2\sqrt{3}}{3}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) 2

e) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

f) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

g) $\sqrt{2}$

h) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

i) -2

j) -2

k) 1

l) -2

m) $-\sqrt{2}$

n) -1

o) 0

Ejercicio 8

a) $\frac{\pi}{3}$

b) $\frac{\pi}{2}$

c) 0

d) $\frac{-\pi}{3}$

e) $\frac{2\pi}{3}$

f) $\frac{\pi}{2}$

g) $\frac{\pi}{3}$

h) $\frac{\pi}{6}$

i) $\frac{-\pi}{6}$

j) $\frac{3\pi}{4}$

k) $\frac{5\pi}{6}$

l) $\frac{\pi}{4}$

m) $\frac{-\pi}{3}$

n) $\frac{\pi}{4}$

o) $\frac{2\pi}{3}$

Ejercicio 9

a) $$\frac{\tan x}{\sec x-1}+\frac{\tan x}{\sec x+1}=2\csc x$$

$$\begin{aligned}
\frac{\tan x}{\sec x-1}+\frac{\tan x}{\sec x+1}&=\frac{\tan x(\sec x+1)+\tan x(\sec x-1)}{(\sec x-1)(\sec x+1)}\\
&=\frac{\tan x\sec x+\tan x+\tan x\sec x-\tan x}{\sec^2 x-1}\\
&=\frac{2\tan x\sec x}{\tan^2 x}\\
&=\frac{2\sec x}{\tan x}\\
&=\frac{\frac{2}{\cos x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}\\
&=\frac{2}{\operatorname{sen} x}\\
&=2\csc x.
\end{aligned}$$

b) $$\sec x\csc x=\tan x+\cot x$$

$$\begin{aligned}
\tan x+\cot x&=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\\
&=\frac{\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x}{\cos x\operatorname{sen} x}\\
&=\frac{1}{\cos x\operatorname{sen} x}\\
&=\sec x\csc x.
\end{aligned}$$

c) $$\operatorname{sen} x\cos x=\frac{\tan x}{1+\tan^2 x}$$

$$\begin{aligned}\frac{\tan x}{1+\tan^2 x} &= \frac{\tan x}{\sec^2 x}\\ &= \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}\\ &= \frac{\operatorname{sen} x\cos^2 x}{\cos x}\\ &= \operatorname{sen} x\cos x.\end{aligned}$$

d) $\cos(4x)=\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x-6\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x$

$$\begin{aligned}\cos(4x) &= \cos(2\cdot 2x)\\ &= \cos^2(2x)-\operatorname{sen}^2(2x)\\ &= \left(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x\right)^2-(2\operatorname{sen} x\cos x)^2\\ &= \cos^4 x-2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x+\operatorname{sen}^4 x-4\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\\ &= \operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x-6\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x.\end{aligned}$$

e) $\dfrac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}+\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}=2\sec x$

$$\begin{aligned}\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}+\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} &= \frac{\cos x(1+\operatorname{sen} x)+\cos x(1-\operatorname{sen} x)}{(1-\operatorname{sen} x)(1+\operatorname{sen} x)}\\ &= \frac{\cos x+\cos x\operatorname{sen} x+\cos x-\cos x\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen}^2 x}\\ &= \frac{2\cos x}{\cos^2 x}=\frac{2}{\cos x}=2\sec x.\end{aligned}$$

f) $\cot x+\tan x+1=\dfrac{\cot x}{1-\tan x}+\dfrac{\tan x}{1-\cot x}$

$$\frac{\cot x}{1-\tan x}+\frac{\tan x}{1-\cot x}=\frac{\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{1-\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}+\frac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{1-\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}$$

$$=\frac{\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\dfrac{\cos x-\operatorname{sen} x}{\cos x}}+\frac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\dfrac{\operatorname{sen} x-\cos x}{\operatorname{sen} x}}$$

$$=\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x(\cos x-\operatorname{sen} x)}+\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x(\operatorname{sen} x-\cos x)}$$

$$=\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x(\cos x-\operatorname{sen} x)}-\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x(\cos x-\operatorname{sen} x)}$$

$$=\frac{\cos^3 x-\operatorname{sen}^3 x}{\operatorname{sen} x\cos x(\cos x-\operatorname{sen} x)}$$

$$=\frac{(\cos x-\operatorname{sen} x)(\cos^2 x+\operatorname{sen} x\cos x+\operatorname{sen}^2 x)}{\operatorname{sen} x\cos x(\cos x-\operatorname{sen} x)}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\operatorname{sen} x\cos x+\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x\cos x}$$

$$=\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x\cos x}+\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x\cos x}+\frac{\operatorname{sen} x\cos x}{\operatorname{sen} x\cos x}$$

$$=\cot x+\tan x+1.$$

g) $\csc(x+y)=\dfrac{\sec x\csc x\sec y\csc y}{\csc x\sec y+\sec x\csc y}$

$$
\begin{aligned}
\csc(x+y) &= \frac{1}{\operatorname{sen}(x+y)} \\
&= \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x} \\
&= \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x} \div \frac{\operatorname{sen} x \cos y \operatorname{sen} y \cos x}{\operatorname{sen} x \cos y \operatorname{sen} y \cos x} \\
&= \frac{\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{\cos y} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} y}}{\frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{\cos y} + \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} y}} \\
&= \frac{\sec x \csc x \sec y \csc y}{\csc x \sec y + \sec x \csc y}.
\end{aligned}
$$

h) $\cot x = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{1-\cos 2x}$

$$
\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen} 2x}{1-\cos 2x} &= \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{1-\left(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right)} \\
&= \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{1-\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x} \\
&= \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 x} \\
&= \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{2 \operatorname{sen}^2 x} \\
&= \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \\
&= \cot x.
\end{aligned}
$$

i) $\cos x \cos 2x \cos 4x = \dfrac{\operatorname{sen} 8x}{8 \operatorname{sen} x}$

$$
\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen} 8x}{8 \operatorname{sen} x} &= \frac{\operatorname{sen}(2 \cdot 4x)}{8 \operatorname{sen} x} \\
&= \frac{2 \operatorname{sen} 4x \cos 4x}{8 \operatorname{sen} x} \\
&= \frac{2 \cdot 2 \operatorname{sen} 2x \cos 2x \cdot \cos 4x}{8 \operatorname{sen} x} \\
&= \frac{4 \cdot 2 \operatorname{sen} x \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x}{8 \operatorname{sen} x} \\
&== \frac{8 \operatorname{sen} x \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x}{8 \operatorname{sen} x} \\
&= \cos x \cos 2x \cos 4x.
\end{aligned}
$$

Ejercicio 10

a) $$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \frac{\sec\theta}{\csc\theta} = \tan\theta + \frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}} = \tan\theta + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = 2\tan\theta.$$

b) $$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta + \tan^2\theta = 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta.$$

c) $$\frac{\tan^2\theta + 1}{\cot^2\theta + 1} = \frac{\sec^2\theta}{\csc^2\theta} = \tan^2\theta.$$

d) $$\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta\tan\theta}{\sec\theta\csc\theta\cot\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta \cdot \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{\frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \cdot \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}} = \operatorname{sen}^4\theta.$$

e) $$\frac{\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta + \cos^3\theta - \cos\theta + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta\left(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta\right) - \cos\theta + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$
$$= \frac{\cos\theta - \cos\theta + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$
$$= \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$
$$= \tan\theta.$$

Ejercicio 11

a) $\tan x = 3\cot x$

$$\Rightarrow \tan x - 3\cot x = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \frac{3\cos x}{\operatorname{sen} x} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}^2 x - 3\cos^2 x}{\cos x \operatorname{sen} x} = 0$$
$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x - 3\cos^2 x = 0$$
$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x - 3\left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right) = 0$$
$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x - 3 + 3\operatorname{sen}^2 x = 0$$
$$\Rightarrow 4\operatorname{sen}^2 x = 3$$
$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{3}{4}$$
$$\Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Finalmente, $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

b) $2\operatorname{sen} x = \tan x$

$$\Rightarrow 2\operatorname{sen} x - \tan x = 0$$

$$\Rightarrow 2\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2\operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x} = 0$$

$$\Rightarrow 2\operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} x(2\cos x - 1) = 0.$$

De lo anterior, se tiene que $\operatorname{sen} x = 0$ o $2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$. Finalmente,

$$S = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\right\}$$

c) $2\operatorname{sen}^2 x = 3 + 2\cos^2 x$

$$\Rightarrow 2\operatorname{sen}^2 x - 3 - 2\cos^2 x = 0$$

$$\Rightarrow 2\operatorname{sen}^2 x - 3 - 2\left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right) = 0$$

$$\Rightarrow 2\operatorname{sen}^2 x - 3 - 2 + 2\operatorname{sen}^2 x = 0$$

$$\Rightarrow 4\operatorname{sen}^2 x = 5$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Pero note que $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ no tiene solución, pues $\frac{\sqrt{5}}{2} \notin [-1,1]$. Finalmente,

$$S = \{\ \}$$

d) $9\csc^2 x = 4\tan^2 x$

$$\Rightarrow \frac{9}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{4\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$
$$\Rightarrow 9\cos^2 x = 4\operatorname{sen}^4 x$$
$$\Rightarrow 0 = 4\operatorname{sen}^4 x - 9\cos^2 x$$
$$\Rightarrow 0 = 4\operatorname{sen}^4 x - 9\left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right)$$
$$\Rightarrow 0 = 4\operatorname{sen}^4 x + 9\operatorname{sen}^2 x - 9.$$

De esta última ecuación, se obtiene que $\operatorname{sen}^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Se descarta $\operatorname{sen}^2 x = -3$, ya que esta ecuación carece de solución.

Finalmente, $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$.

e) $\operatorname{sen} 2x \cos x = \cos 2x \operatorname{sen} x$

$$\Rightarrow 2\operatorname{sen} x \cos x \cos x = \left(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right)\operatorname{sen} x$$
$$\Rightarrow 2\operatorname{sen} x \cos^2 x = \operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x$$
$$\Rightarrow \operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen} x \cos^2 x = 0$$
$$\Rightarrow \operatorname{sen} x\left(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x\right) = 0$$
$$\Rightarrow \operatorname{sen} x = 0.$$

Finalmente, $S = \{0, \pi\}$.

f) $\sqrt{2}\operatorname{sen} 4x - 1 = 0$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} 4x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Note que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ para $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ y $\alpha = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$. Si $\alpha = 4x$, se tiene que

$x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}$. Para $k = 0,1,2,3$, las soluciones son

$$S = \left\{\frac{\pi}{16}, \frac{3\pi}{16}, \frac{9\pi}{16}, \frac{11\pi}{16}, \frac{17\pi}{16}, \frac{19\pi}{16}, \frac{25\pi}{16}, \frac{27\pi}{16},\right\}.$$

g) $\cot^2 x + \csc^2 x - 3 = 0$

$$\Rightarrow \cot^2 x + 1 + \cot^2 x - 3 = 0$$
$$\Rightarrow 2\cot^2 x - 2 = 0$$
$$\Rightarrow \cot^2 x = 1$$
$$\Rightarrow \cot x = \pm 1.$$

Finalmente, $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$.

h) $11 - 5\cos^2 x + 13\operatorname{sen} x = 0$

$$11 - 5\cos^2 x + 13\operatorname{sen} x = 0$$
$$\Rightarrow 11 - 5\left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right) + 13\operatorname{sen} x = 0$$
$$\Rightarrow 11 - 5 + 5\operatorname{sen}^2 x + 13\operatorname{sen} x = 0$$
$$\Rightarrow 5\operatorname{sen}^2 x + 13\operatorname{sen} x + 6 = 0.$$

Ahora, al hacer $y = \operatorname{sen} x$, se consigue la ecuación cuadrática $5y^2 + 13y + 6 = 0$, de donde deriva que $y = -2$ y $y = \frac{-3}{5}$.

Luego, la ecuación $y = -2 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -2$ no tiene solución. Por su parte, para $y = \frac{-3}{5} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{-3}{5}$, se puede encontrar un valor aproximado de x (en radianes) con la calculadora: $x \approx -0,6435$, pero note que $x \notin [0, 2\pi]$; entonces, se debe tomar 0,6435 como la medida del ángulo de referencia. Recuerde que la función seno es negativa en el tercer y cuarto cuadrante; de este modo, el conjunto solución es $S=\{\pi+0,6435; 2\pi-0,6435\}$.

Ejercicios de autoevaluación

Ejercicio 1

El ángulo mide $\frac{2}{5}\cdot 360° = 144°$, que equivale a $\frac{4}{5}\pi$ radianes.

Ejercicio 2

a) $\cos u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(u+v) - \operatorname{sen}(u-v)\right]$

$\operatorname{sen}(u+v) = \operatorname{sen} u \cos v + \operatorname{sen} v \cos u$ y, además, $\operatorname{sen}(u-v) = \operatorname{sen} u \cos v - \operatorname{sen} v \cos u$, entonces, $\operatorname{sen}(u+v) - \operatorname{sen}(u-v) = 2\operatorname{sen} v \cos u$.

b) $\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$

Recuerde que $\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$. De modo que

$$\begin{aligned}2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2} &= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{u+v}{2}+\frac{u-v}{2}\right) + \cos\left(\frac{u+v}{2}-\frac{u-v}{2}\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\cos u + \cos v\right].\end{aligned}$$

Así, $\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$.

Ejercicio 3

Recuerde que $\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$ y $\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} v = 2\cos\frac{u+v}{2}\operatorname{sen}\frac{u-v}{2}$. De esta forma,

$$\frac{\cos 8x+\cos 6x}{\operatorname{sen} 8x-\operatorname{sen} 6x}=\frac{2\cos\frac{8x+6x}{2}\cos\frac{8x-6x}{2}}{2\cos\frac{8x+6x}{2}\operatorname{sen}\frac{8x-6x}{2}}$$
$$=\frac{2\cos 7x\cos x}{2\cos 7x\operatorname{sen} x}=\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}=\cot x.$$

Ejercicio 4

Se sabe que $\tan 3x=\dfrac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$, entonces, la ecuación se transforma de la siguiente manera:

$$\tan 3x-\tan x=0$$
$$\Rightarrow \frac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}-\tan x=0$$
$$\Rightarrow \frac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}=\tan x$$
$$\Rightarrow 3\tan x-\tan^3 x=\tan x\left(1-3\tan^2 x\right)$$
$$\Rightarrow 3\tan x-\tan^3 x=\tan x-3\tan^3 x$$
$$\Rightarrow 3\tan x-\tan^3 x-\tan x+3\tan^3 x=0$$
$$\Rightarrow 2\tan x+2\tan^3 x=0$$
$$\Rightarrow 2\tan x\left(\tan^2 x+1\right)=0.$$

De esta última ecuación, se tiene que $2\tan x=0$, o bien $\tan^2 x+1=0$. Sin embargo, $\tan^2 x+1=0$ no tiene solución. Por otro lado, los únicos valores en $[0,2\pi[$ para los cuales $2\tan x=0$ son, precisamente, 0 y π. Por lo tanto, $S=\{0,\pi\}$.

Ejercicio 5

Si $\cot(x+y)=0$, entonces $\cos(x+y)=0\Rightarrow \cos x\cos y=\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y$. Ahora,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x+2y) &= \operatorname{sen} x \cos 2y + \operatorname{sen} 2y \cos x \\ &= \operatorname{sen} x\left(\cos^2 y - \operatorname{sen}^2 y\right) + 2\operatorname{sen} y \cos y \cos x \\ &= \operatorname{sen} x \cos^2 y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 y + 2\operatorname{sen} y(\cos y \cos x) \\ &= \operatorname{sen} x \cos^2 y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 y + 2\operatorname{sen} y(\operatorname{sen} y \operatorname{sen} x) \\ &= \operatorname{sen} x \cos^2 y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 y \\ &= \operatorname{sen} x\left(\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y\right) \\ &= \operatorname{sen} x.\end{aligned}$$

Ejercicio 6

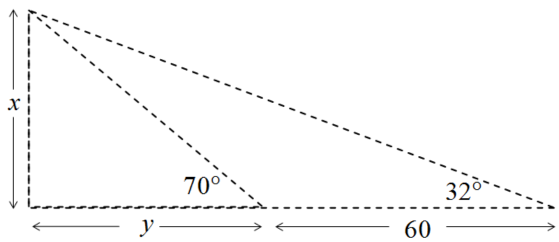
Si se denota con x el tercer lado del terreno y se aplica la ley de cosenos, se tiene que:

$$\begin{aligned}&x^2 = 10^2 + 16^2 - 2\cdot 10\cdot 16\cdot \cos 120° \\ &\Rightarrow x^2 = 100 + 256 - 320\cdot \cos 120° \\ &\Rightarrow x^2 = 516 \\ &\Rightarrow x = 2\sqrt{129}.\end{aligned}$$

De esta manera, el tercer lado mide 22,72 m, aproximadamente. En consecuencia, el perímetro del terreno es de 48,72 m y se requieren, al menos, 243,60 m de alambre para cercar el terreno con las condiciones dadas.

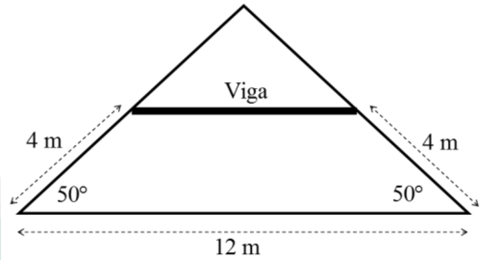
Ejercicio 7

La situación planteada puede representarse mediante la siguiente figura:



Observe que la altura del campanario puede determinarse mediante la expresión $\dfrac{60\tan 32^\circ}{\tan 70^\circ - \tan 32^\circ}$. Así, se concluye que la altura del campanario es 17,66 m, aproximadamente.

Ejercicio 8

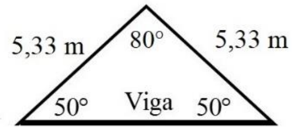


Los dos triángulos de la figura dada son semejantes porque la viga es paralela a la base del triángulo mayor. Además, se sabe que ambos triángulos son isósceles porque los ángulos de la base son congruentes (miden 50° cada uno). También, se puede deducir que el ángulo superior mide 80°.

Luego, se denota con x la medida de los lados congruentes del triángulo mayor y se aplica la ley de senos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
&\frac{\operatorname{sen} 80^\circ}{12} = \frac{\operatorname{sen} 50^\circ}{x} \\
&\Rightarrow x = \frac{12 \operatorname{sen} 50^\circ}{\operatorname{sen} 80^\circ} \\
&\Rightarrow x \approx 9{,}33.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, los lados congruentes del triángulo menor miden $9{,}33 - 4 = 5{,}33$ m. En la figura siguiente, se muestra el triángulo menor, el cual contiene la viga:



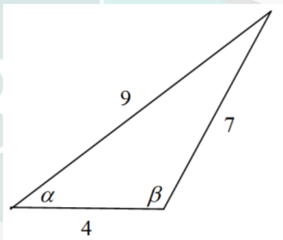
Ahora, se denota con y la medida de la viga y se aplica la ley de senos.

$$\frac{\text{sen}\,80^\circ}{y}=\frac{\text{sen}\,50^\circ}{5,33}$$
$$\Rightarrow y=\frac{5,33\,\text{sen}\,80^\circ}{\text{sen}\,50^\circ}$$
$$\Rightarrow y\approx 6,85.$$

De esta manera, la longitud de la viga es 6,85 m, aproximadamente.

Ejercicio 9

La situación planteada puede representarse mediante la siguiente figura:



En la figura, α es el ángulo de elevación de Matías al papalote y β el ángulo de elevación de Jordan al papalote. Luego, al aplicar la ley de cosenos en cada caso, se tiene:

$$7^2=9^2+4^2-2\cdot 9\cdot 4\cdot\cos\alpha$$
$$\Rightarrow 49=81+16-72\cos\alpha$$
$$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{2}{3}$$
$$\Rightarrow \alpha\approx 48,19.$$

$$9^2=7^2+4^2-2\cdot 7\cdot 4\cdot\cos\beta$$
$$\Rightarrow 81=49+16-56\cos\beta$$
$$\Rightarrow \cos\beta=\frac{-2}{7}$$
$$\Rightarrow \beta\approx 106,6.$$

De esta manera, los ángulos de elevación de Matías y de Jordan al papalote miden, respectivamente, 48,19° y 106,6°.

Fuentes consultadas

Ávila, J. (2003). *Álgebra y Trigonometría*. Cartago: Editorial Tecnológica.

Barrantes, H. (2005). *Introducción a la Matemática*. San José, Costa Rica: EUNED.

Barrantes, H. (2010). *Matemática Básica para Administración*. San José, Costa Rica: EUNED.

Chacel, R. (s. f.). George Polya. Estrategias para la resolución de problemas. Recuperado de http://ficus.pntic.mec.es/fheb0005/Hojas_varias/Material_de_apoyo/-Estrategias%20de%20Polya.pdf

Goodman, A. y Hirsch, L. (1996). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México: Prentice Hall.

Larson, R. y Hostetler, R. (2010). *Precálculo* (7.ª ed.). México, D. F.: Editorial Reverté S. A.

Ministerio de Hacienda (2017). Impuesto sobre la renta (régimen tradicional). Recuperado de http://www.hacienda.go.cr/contenido/12994-regimen-tradicional

Murillo, M., Soto, A. y Araya, J. (2003). *Matemática básica con aplicaciones*. San José, Costa Rica: EUNED.

Paul, R. y Haeussler, E. (2003). *Matemáticas para administración y economía* (10.ª ed.). México: Pearson.

Ruiz, A. (2003). *Historia y Filosofía de las matemáticas*. San José, Costa Rica: EUNED.

Sullivan, M. (2013). *Álgebra y Trigonometría* (9.ª ed.). México, D. F.: Pearson.

Zill, D. y Wright, W. (2011). *Cálculo. Trascendentes tempranas* (4.ª ed.). México, D. F.: McGraw-Hill.