Ejercicios de la sección 6.1

Ejercicio 1

1. Clasifique cada función como creciente o decreciente, de acuerdo con el criterio

a)	$h(x)=7^x$ **SOLUCIÓN** Dado que si se denota con b a la base se tiene que $b=7>1$, la función es creciente.
b)	$m(x)=0,71^x$ **SOLUCIÓN** Al denotar con b a la base se tiene que $b=0,71$ y como $0<0,71<1$, la función es decreciente.
c)	$l(x)=247^x$ **SOLUCIÓN** Dado que si se denota con b a la base se tiene que $b=247>1$, la función es creciente.
d)	$k(x)=\left(\frac{101}{204}\right)^x$ **SOLUCIÓN** Al denotar con b a la base se tiene que $b=\frac{101}{204}$ y como $0<\frac{101}{204}<1$, la función es decreciente.
e)	$c(x)=10^x$ **SOLUCIÓN** Dado que si se denota con b a la base se tiene que $b=10>1$, la función es creciente.

f) $c(x)=\pi^x$

SOLUCIÓN
Dado que si se denota con b a la base se tiene que $b=\pi>1$, la función es creciente.

g) $j(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{-x}$

SOLUCIÓN
Note que $j(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{-x}=4^x$, si se denota con b a la base se tiene que $b=4>1$, la función es creciente.

h) $f(x)=5^{-3x}$

SOLUCIÓN
Note que $f(x)=5^{-3x}=\left(\frac{1}{5^3}\right)^x=\left(\frac{1}{125}\right)^x$, al denotar con b a la base se tiene que $b=\frac{1}{125}$ y como $0<\frac{1}{125}<1$, la función es decreciente.

i) $g(x)=\left(\frac{7}{5}\right)^{-3x}$

SOLUCIÓN
Note que $g(x)=\left(\frac{7}{5}\right)^{-3x}=\left(\frac{5}{7}\right)^{3x}=\left(\frac{125}{343}\right)^x$, al denotar con b a la base se tiene que $b=\frac{125}{343}$ y como $0<\frac{125}{343}<1$, la función es decreciente.

j) $t(x)=-3\cdot(2)^{3x}$

SOLUCIÓN
Note que $t(x)=-3\cdot(2)^{3x}=-3f(x)$, donde $f(x)=(2)^{3x}=\left(2^3\right)^x=8^x$ y dicha función es creciente, pero al multiplicarla por un número negativo la función es decreciente. Por tanto $t(x)=-3\cdot(2)^{3x}$ es decreciente.

k) $s(x)=4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^x$

SOLUCIÓN

Note que $s(x)=4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^x=4f(x)$, donde $f(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^x$ y dicha función es decreciente, al multiplicarla por un número positivo la función sigue siendo decreciente. Así $s(x)=4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^x$ es decreciente.

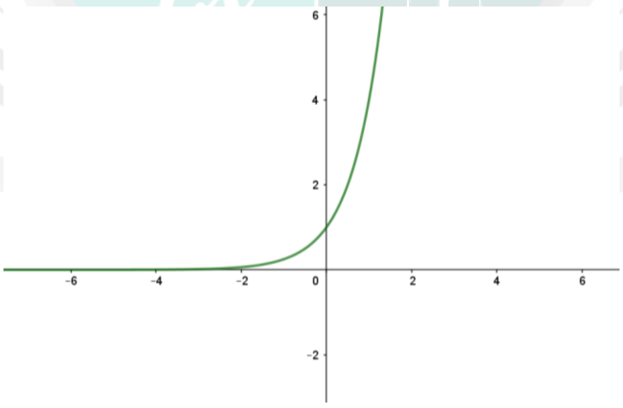
l) $v(x)=(71)^x+20$

SOLUCIÓN

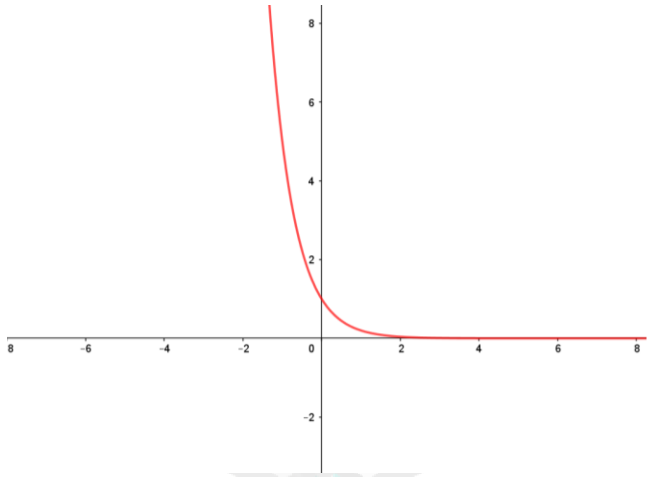
Note que $v(x)=(71)^x+20=g(x)+20$, donde $g(x)=(71)^x$ y dicha función es creciente, además $v(x)$ resulta de trasladar la función $g(x)=(71)^x$, 20 unidades a arriba por tanto $v(x)$ es creciente.

Ejercicio 2

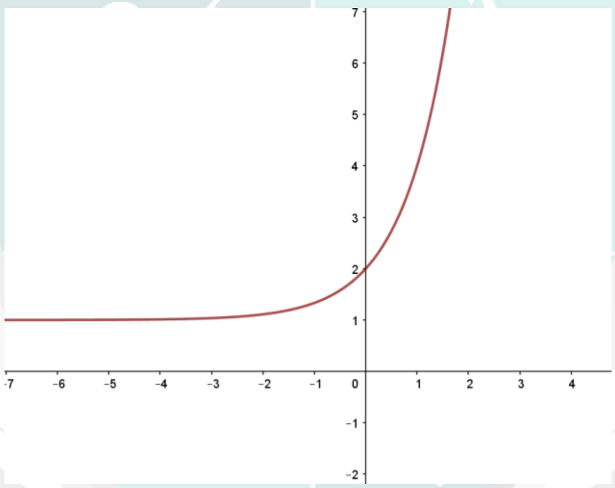
a) $f(x)=4^x$



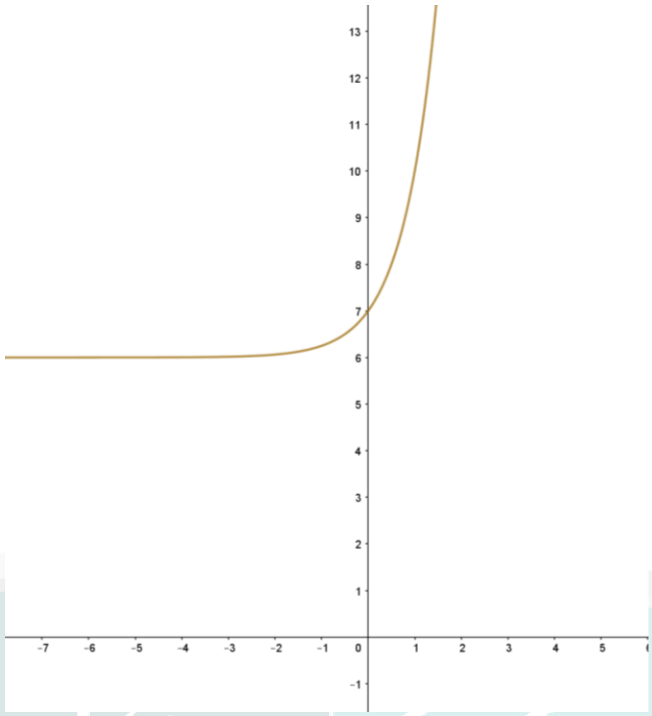
b) $c(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x$



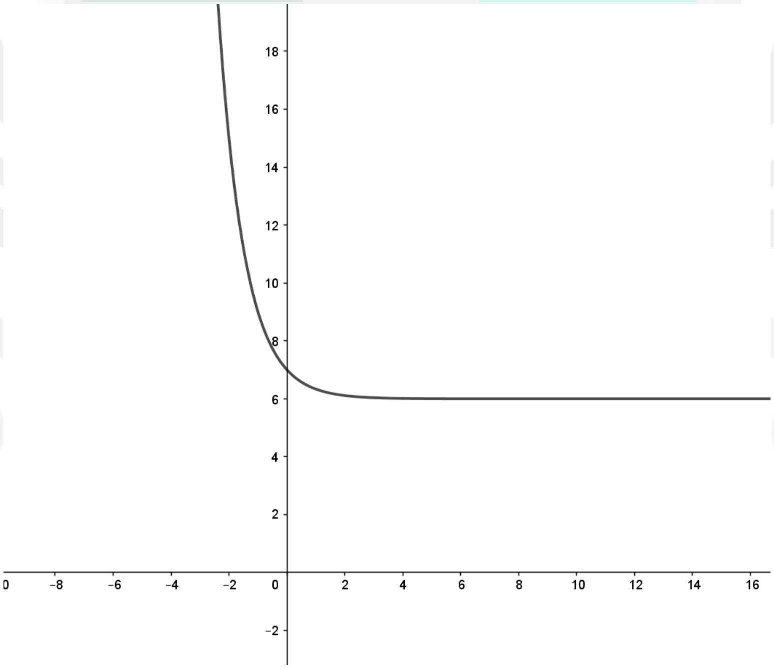
c) $m(x) = 3^x + 1$



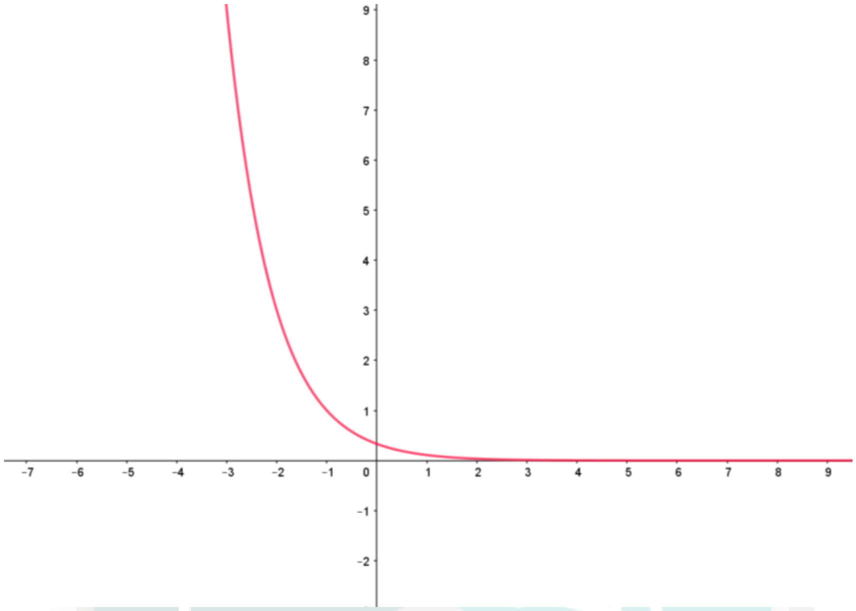
d) $k(x) = 4^x - 6$


13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

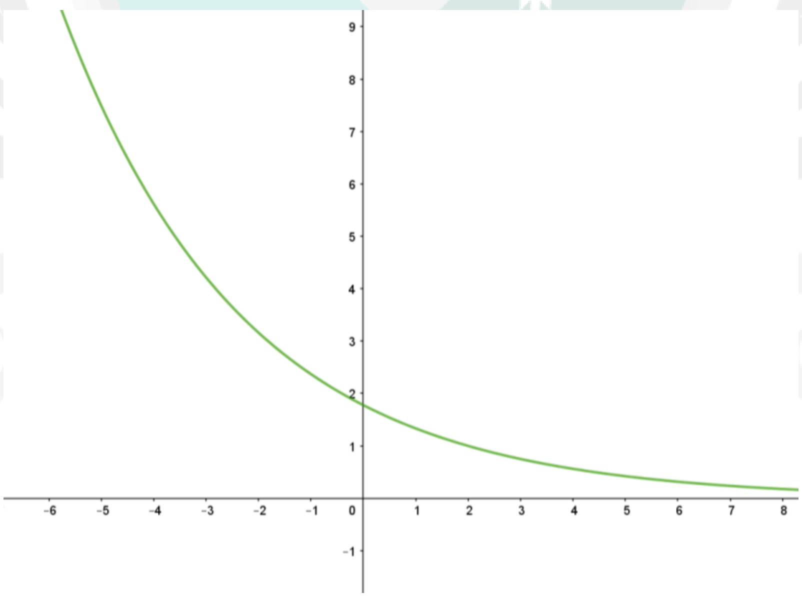
e) $b(x)=3^{-x}+6$


18
16
14
12
10
8
6
4
2
-2
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
12
14
16

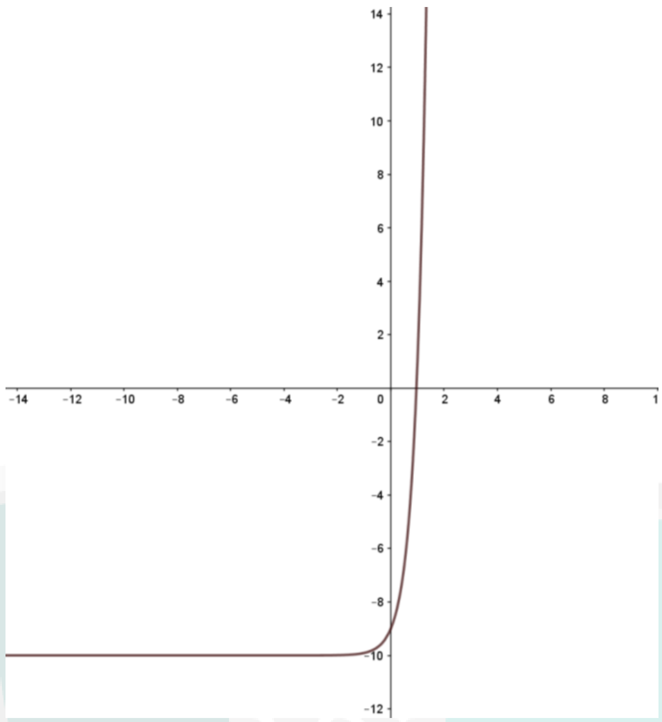
f) $r(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$



g) $l(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^{x-2}$



h) $t(x)=11^x-10$



Ejercicio 3

a) $f(x)=2^x$ para $g(x)=2^x-7$

SOLUCIÓN

Note que $g(x)=2^x-7=f(x)-7$, por tanto se toma la gráfica de $f(x)=2^x$ y se traslada siete unidades hacia abajo.

b) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ para $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5}$

SOLUCIÓN

	Note que $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5}=f(x-5)$, por tanto se toma la gráfica de $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ y se traslada cinco unidades hacia la derecha.
c)	$f(x)=4^x$ para $g(x)=(4)^{x+11}$ **Solución** Note que $g(x)=(4)^{x+11}=f(x+11)$, por tanto se toma la gráfica de $f(x)=4^x$ y se traslada once unidades hacia la izquierda.
d)	$f(x)=(3)^x$ para $g(x)=(3)^x+9$ **Solución** Note que $g(x)=3^x+9=f(x)+9$, por tanto se toma la gráfica de $f(x)=3^x$ y la traslada o desplaza 9 unidades hacia arriba.
e)	$f(x)=\left(\frac{5}{4}\right)^{x}$ para $g(x)=\left(\frac{5}{4}\right)^{-x}$ **Solución** Note que $g(x)=\left(\frac{5}{4}\right)^{-x}=f(-x)$, por tanto se toma la gráfica de $f(x)=\left(\frac{5}{4}\right)^{x}$ y la refleja sobre el eje "*y*".
f)	$f(x)=7^x$ para $g(x)=-7^x-8$. **Solución** Note que $g(x)=-7^x-8=-f(x)-8$, por tanto se toma la gráfica de $f(x)=7^x$, la refleja sobre el eje "*x*" y la desplaza 8 unidades hacia abajo.

g)	$f(x)=\left(\frac{7}{6}\right)^{x}$ para $g(x)=\left(\frac{7}{6}\right)^{-x}-2$ **SOLUCIÓN** Note que $g(x)=\left(\frac{7}{6}\right)^{-x}-2=f(-x)-2$, por tanto se toma la gráfica de $f(x)=\left(\frac{7}{6}\right)^{x}$, la refleja sobre el eje "y" y la desplaza o traslada 2 unidades hacia abajo.
h)	$f(x)=13^{x}$ para $g(x)=-13^{x}+1$ **SOLUCIÓN** Note que $g(x)=-13^{x}+1=-f(x)+1$, por tanto se toma la gráfica de $f(x)=13^{x}$, la refleja sobre el eje "x" y la desplaza 1 unidad hacia arriba.
i)	$f(x)=10^{x}$ para $g(x)=10^{-x}+7$ **SOLUCIÓN** Note que $g(x)=10^{-x}+7=f(-x)+7$, por tanto se toma la gráfica de $f(x)=10^{x}$, la refleja sobre el eje "y" y la desplaza 7 unidades hacia arriba.
j)	$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ para $g(x)=-\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-2$ **SOLUCIÓN** Note que $g(x)=-\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-2=-f(x)-2$, por tanto se toma la gráfica de $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$, la refleja sobre el eje "x" y la desplaza 2 unidades hacia abajo.

Ejercicio 4

a) $3^{-4x+5} = 3^{7x-6}$

SOLUCIÓN

Como la base de ambas expresiones a ambos lados de la igualdad es la misma y es 3. De acuerdo con la biyectividad de la función exponencial la igualdad se satisface si

$$\begin{aligned} & -4x+5 = 7x-6 \\ \Leftrightarrow\ & 5+6 = 7x+4x \\ \Leftrightarrow\ & 11 = 11x \\ \Leftrightarrow\ & \frac{11}{11} = x \\ \Leftrightarrow\ & 1 = x \end{aligned}$$

Por tanto se tiene que $S = \{1\}$.

b) $S = \{-1, 4\}$

c) $2^{x+7} = 8$

SOLUCIÓN

Note que las bases no son iguales, sin embargo $2^{x+7} = 8 \Leftrightarrow 2^{x+7} = 2^3$ y como la base de ambas expresiones, a ambos lados de la igualdad, es la misma y es 2. De acuerdo con la biyectividad de la función exponencial la igualdad se satisface si

$$\begin{aligned} & x+7 = 3 \\ \Leftrightarrow\ & x = 3-7 \\ \Leftrightarrow\ & x = -4 \end{aligned}$$

Por tanto se tiene que $S = \{-4\}$.

d) $S=\left\{\frac{10}{3}\right\}$

e) $5^{x-3}=625$

SOLUCIÓN

Note que las bases no son iguales, sin embargo $5^{x-3}=625 \Leftrightarrow 5^{x-3}=5^{4}$ y como la base de ambas expresiones, a ambos lados de la igualdad, es la misma. De acuerdo con la biyectividad de la función exponencial la igualdad se satisface si

$$\begin{aligned} & x-3=4 \\ \Leftrightarrow & x=4+3 \\ \Leftrightarrow & x=7 \end{aligned}$$

Por tanto se tiene que $S=\{7\}$.

f) $S=\{-1,5\}$

g) $4^{2x-7}=256$

SOLUCIÓN

Note que las bases no son iguales, sin embargo

$4^{2x-7}=256 \Leftrightarrow \left(2^{2}\right)^{2x-7}=2^{8} \Leftrightarrow 2^{4x-14}=2^{8}$ y como la base de ambas expresiones, a ambos lados de la igualdad, es la misma. De acuerdo con la biyectividad de la función exponencial la igualdad se satisface si

$$\begin{aligned} & 4x-14=8 \\ \Leftrightarrow\ & 4x=8+14 \\ \Leftrightarrow\ & 4x=22 \\ \Leftrightarrow\ & x=\frac{22}{4} \\ \Leftrightarrow\ & x=\frac{11}{2} \end{aligned}$$

Por tanto se tiene que $S=\left\{\frac{11}{2}\right\}$.

h) $S=\{0\}$

i) $9^x+16=43$

Solución

Note que las bases no son iguales, sin embargo

$$\begin{aligned} & 9^x+16=43 \\ \Leftrightarrow\ & 9^x=43-16 \\ \Leftrightarrow\ & 9^x=27 \\ \Leftrightarrow\ & \left(3^2\right)^x=3^3 \\ \Leftrightarrow\ & 3^{2x}=3^3 \end{aligned}$$

Como la base, a ambos lados de la igualdad son iguales, de acuerdo con la biyectividad de la función exponencial la igualdad se satisface si

$$\begin{aligned} & 2x=3 \\ \Leftrightarrow\ & x=\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Por tanto se tiene que $S=\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

j) $S=\left\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\right\}$

k) $7\cdot 13^{x}-7=0$

SOLUCIÓN

Note que

$$\begin{aligned} & 7\cdot 13^{x}-7=0 \\ \Leftrightarrow\ & 7\cdot 13^{x}=7 \\ \Leftrightarrow\ & 13^{x}=\frac{7}{7} \\ \Leftrightarrow\ & 13^{x}=1 \end{aligned}$$

Pero dado que $13^{0}=1$, entonces $13^{x}=1\Leftrightarrow 13^{x}=3^{0}$ como la base, a ambos lados de la igualdad son iguales, de acuerdo con la biyectividad de la función exponencial la igualdad se satisface si $x=0$.

Por tanto se tiene que $S=\{0\}$.

l) $S=\left\{\frac{-3}{2}\right\}$

m) $\left(\frac{5}{3}\right)^{2x}\cdot\left(\frac{25}{9}\right)^{3x-2}=\frac{25}{9}$

SOLUCIÓN

Note que

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{5}{3}\right)^{2x}\cdot\left(\frac{25}{9}\right)^{3x-2}=\frac{25}{9}\\
\Leftrightarrow&\left(\frac{5}{3}\right)^{2x}\cdot\left(\frac{5^2}{3^2}\right)^{3x-2}=\frac{5^2}{3^2}\\
\Leftrightarrow&\left(\frac{5}{3}\right)^{2x}\cdot\left(\left(\frac{5}{3}\right)^{2}\right)^{3x-2}=\left(\frac{5}{3}\right)^{2}\\
\Leftrightarrow&\left(\frac{5}{3}\right)^{2x}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{6x-4}=\left(\frac{5}{3}\right)^{2}\\
\Leftrightarrow&\left(\frac{5}{3}\right)^{2x+6x-4}=\left(\frac{5}{3}\right)^{2}\\
\Leftrightarrow&\left(\frac{5}{3}\right)^{8x-4}=\left(\frac{5}{3}\right)^{2}
\end{aligned}$$

Como la base, a ambos lados de la igualdad son iguales, de acuerdo con la biyectividad de la función exponencial la igualdad se satisface si

$$\begin{aligned}
&8x-4=2\\
\Leftrightarrow\ &8x=2+4\\
\Leftrightarrow\ &8x=6\\
\Leftrightarrow\ &x=\frac{6}{8}\\
\Leftrightarrow\ &x=\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Por tanto se tiene que $S=\left\{\frac{3}{4}\right\}$.

n) $S=\left\{\frac{3}{5}\right\}$

o) $4^{x-1}=4\sqrt{2}$

SOLUCIÓN

Note que

$$4^{x-1} = 4\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \left(2^2\right)^{x-1} = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$$
$$\Leftrightarrow 2^{2x-2} = 2^{\frac{5}{2}}$$

Como la base, a ambos lados de la igualdad son iguales, de acuerdo con la biyectividad de la función exponencial la igualdad se satisface si

$$2x-2 = \frac{5}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2x = \frac{5}{2}+2$$
$$\Leftrightarrow 2x = \frac{9}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{9}{4}$$

Por tanto se tiene que $S = \left\{\frac{9}{4}\right\}$.

p) $S = \{5\}$

q) $\left(\frac{7}{3}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{9}{49}\right)^{2x} = \frac{27}{243}$

SOLUCIÓN

Note que

$$\left(\frac{7}{3}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{9}{49}\right)^{2x}=\frac{27}{243}$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{7}{3}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{3^2}{7^2}\right)^{2x}=\frac{3^3}{7^3}$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{7}{3}\right)^{x-1}\cdot\left(\left(\frac{3}{7}\right)^{2}\right)^{2x}=\left(\frac{3}{7}\right)^{3}$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{7}{3}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^{4x}=\left(\frac{3}{7}\right)^{3}$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{7}{3}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^{-4x}=\left(\frac{7}{3}\right)^{-3}$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{7}{3}\right)^{x-1-4x}=\left(\frac{7}{3}\right)^{-3}$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{7}{3}\right)^{-3x-1}=\left(\frac{7}{3}\right)^{-3}$$

Como la base, a ambos lados de la igualdad son iguales, de acuerdo con la biyectividad de la función exponencial la igualdad se satisface si

$$\begin{aligned} &-3x-1=-3\\ \Leftrightarrow\ &-3x=-3+1\\ \Leftrightarrow\ &-3x=-2\\ \Leftrightarrow\ &x=\frac{-2}{-3}\\ \Leftrightarrow\ &x=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Por tanto se tiene que $S=\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

r) $S=\{-3,3\}$

s) $3^x+3^{x+1}=36$

SOLUCIÓN

Note que las bases no son iguales, sin embargo

$$
\begin{aligned}
&3^x + 3^{x+1} = 36 \\
\Leftrightarrow\ &3^x + 3^x \cdot 3^1 = 36 \\
\Leftrightarrow\ &3^x\left(1+3^1\right) = 36 \\
\Leftrightarrow\ &3^x \cdot 4 = 36 \\
\Leftrightarrow\ &3^x = \frac{36}{4} \\
\Leftrightarrow\ &3^x = 9 \\
\Leftrightarrow\ &3^x = 3^2
\end{aligned}
$$

Como la base, a ambos lados de la igualdad son iguales, de acuerdo con la biyectividad de la función exponencial la igualdad se satisface si $x = 2$.

Por tanto se tiene que $S = \{2\}$.

t) $S = \{-1\}$

u) $\left(7^x\right)^x = 49^{x+2}$

Solución

Note que

$$
\begin{aligned}
&\left(7^x\right)^x = 49^{x+2} \\
\Leftrightarrow\ &7^{x^2} = \left(7^2\right)^{x+2} \\
\Leftrightarrow\ &7^{x^2} = 7^{2x+4}
\end{aligned}
$$

Como las bases, a ambos lados de la igualdad son iguales, de acuerdo con la biyectividad de la función exponencial la igualdad se satisface si

$$
\begin{aligned}
&x^2 = 2x + 4 \\
\Leftrightarrow\ &x^2 - 2x - 4 = 0 \\
\Leftrightarrow\ &x = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} \\
\Leftrightarrow\ &x = 1 \pm \sqrt{5}
\end{aligned}
$$

Por tanto se tiene que $S = \left\{1-\sqrt{5}, 1+\sqrt{5}\right\}$.

v) $S=\{4\}$

w) $32^{7x-6}=\dfrac{1}{4}$

SOLUCIÓN

Note que

$$\begin{aligned} & 32^{7x-6}=\frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow & \left(2^5\right)^{7x-6}=\frac{1}{2^2} \\ \Leftrightarrow & 2^{35x-30}=2^{-2} \end{aligned}$$

Como las bases, a ambos lados de la igualdad son iguales, de acuerdo con la biyectividad de la función exponencial la igualdad se satisface si

$$\begin{aligned} & 35x-30=-2 \\ \Leftrightarrow & 35x=-2+30 \\ \Leftrightarrow & 35x=28 \\ \Leftrightarrow & x=\frac{28}{35} \\ \Leftrightarrow & x=\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Por tanto se tiene que $S=\left\{\dfrac{4}{5}\right\}$.

x) $S=\{2\}$

y) $\left(\frac{4}{5}\right)^{2x+7} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{3x-6} = \left(\frac{5}{4}\right)^{x-6}$

SOLUCIÓN

Note que

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{4}{5}\right)^{2x+7} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{3x-6} = \left(\frac{5}{4}\right)^{x-6} \\
\Leftrightarrow &\left(\frac{4}{5}\right)^{2x+7+3x-6} = \left(\frac{4}{5}\right)^{-(x-6)} \\
\Leftrightarrow &\left(\frac{4}{5}\right)^{5x+1} = \left(\frac{4}{5}\right)^{-x+6}
\end{aligned}$$

Como la base, a ambos lados de la igualdad son iguales, de acuerdo con la biyectividad de la función exponencial la igualdad se satisface si

$$\begin{aligned}
&5x+1=-x+6 \\
\Leftrightarrow\ &5x+x=6-1 \\
\Leftrightarrow\ &6x=5 \\
\Leftrightarrow\ &x=\frac{5}{6}
\end{aligned}$$

Por tanto se tiene que $S=\left\{\frac{5}{6}\right\}$.

Ejercicio 5

a) $4^{x+1}+2^{x+3}=320$

SOLUCIÓN

Note que

$$
\begin{aligned}
&4^{x+1}+2^{x+3}=320\\
\Leftrightarrow\ &4\cdot 4^{x}+2^{3}\cdot 2^{x}-320=0\\
\Leftrightarrow\ &4\left(2^{x}\right)^{2}+8\cdot 2^{x}-320=0
\end{aligned}
$$

Al utilizar la sustitución $u=2^{x}$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
&4\left(2^{x}\right)^{2}+8\cdot 2^{x}-320=0\\
\Rightarrow\ &4u^{2}+8u-320=0\\
\Rightarrow\ &4\left(u^{2}+2u-80\right)=0\\
\Rightarrow\ &4\left(u-8\right)\left(u+10\right)=0\\
\Rightarrow\ &\begin{cases} u-8=0\Rightarrow u=8\\ u+10=0\Rightarrow u=-10\end{cases}
\end{aligned}
$$

Por tanto, se tiene que

- Si $u=2^{x}$ para $u=8$ se tiene que $2^{x}=8\Leftrightarrow 2^{x}=2^{3}$ lo cual se satisface si $x=3$.
- Si $u=2^{x}$ para $u=-10$ se tiene que $2^{x}=-10$, pero esta ecuación no tiene solución dado que el ámbito de la función $f\left(x\right)=2^{x}$ corresponde a $\mathbb{R}^{+}$. Es decir, no existe ningún valor para *x* que satisfaga la ecuación.

Finalmente se tiene que $S=\left\{3\right\}$.

b) $S=\left\{2\right\}$

c) $3^{-x}+3^{1-x}=\dfrac{4}{9}$

SOLUCIÓN

Note que

$$
\begin{aligned}
&3^{-x}+3^{1-x}=\frac{4}{9}\\
\Leftrightarrow\ &3^{-x}+3\cdot 3^{-x}=\frac{4}{9}
\end{aligned}
$$

Al utilizar la sustitución $u = 3^{-x}$ se tiene que

$$\begin{aligned} 3^{-x} + 3\cdot 3^{-x} &= \frac{4}{9} \\ \Rightarrow u + 3u &= \frac{4}{9} \\ \Rightarrow 4u &= \frac{4}{9} \\ \Rightarrow u &= \frac{4}{4\cdot 9} \\ \Rightarrow u &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que

- Si $u = 3^{-x}$ para $u = \frac{1}{9}$ se tiene que $3^{-x} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^{-x} = 3^{-2}$ lo cual se satisface si $x = 2$

Finalmente se tiene que $S = \{2\}$.

d) $S = \{0\}$

e) $25^x - 2\cdot 5^{x+1} = -25$

SOLUCIÓN

Note que

$$\begin{aligned} & 25^x - 2\cdot 5^{x+1} = -25 \\ \Leftrightarrow & \left(5^2\right)^x - 2\cdot 5\cdot 5^x + 25 = 0 \\ \Leftrightarrow & \left(5^x\right)^2 - 10\cdot 5^x + 25 = 0 \end{aligned}$$

Al utilizar la sustitución $u = 5^x$ se tiene que

$$\begin{aligned} & \left(5^x\right)^2 - 10\cdot 5^x + 25 = 0 \\ \Rightarrow & u^2 - 10u + 25 = 0 \\ \Rightarrow & (u-5)(u-5) = 0 \\ \Rightarrow & \{u - 5 = 0 \Rightarrow u = 5 \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que

	○Si $u=5^x$ para $u=5$ se tiene que $5^x=5 \Leftrightarrow 5^x=5^1$ lo cual se satisface si $x=1$. Finalmente se tiene que $S=\{1\}$.
f)	$S=\{12\}$

Ejercicio 6

De acuerdo con la información dada se debe satisfacer que $b^{-2}=\frac{1}{16}$.

Al resolver dicha ecuación se tiene que $b^{-2}=\frac{1}{16} \Leftrightarrow b^{-2}=4^{-2}$

Como los exponentes, a ambos lados de la igualdad son iguales, de acuerdo con la biyectividad de la función exponencial la igualdad se satisface si

$$\begin{aligned} & b^{-2}=4^{-2} \\ \Leftrightarrow & \, b=4 \end{aligned}$$

Por tanto, el valor de la base *b* es 4.

Ejercicio 7

De acuerdo con la información dada se debe satisfacer que $b^3=\frac{27}{343}$.

Al resolver dicha ecuación se tiene que

$$\begin{aligned} & b^3=\frac{27}{343} \\ \Leftrightarrow & \sqrt[3]{b^3}=\sqrt[3]{\frac{27}{343}} \\ \Leftrightarrow & \, b=\frac{3}{7} \end{aligned}$$

Por tanto $f(x)=\left(\frac{3}{7}\right)^x$, luego $f(-2)=\left(\frac{3}{7}\right)^{-2}=\frac{49}{9}$ y $f(4)=\left(\frac{3}{7}\right)^4=\frac{81}{2401}$

Ejercicio 8

a)	La población, a finales de 2025, será de 4935 habitantes, aproximadamente.
b)	La población será de 6661 habitantes, aproximadamente, a finales de 2035.
c)	Como la base de la función es $e^{0,03} > 1$, la función es creciente y, al multiplicarla por 4000, que es mayor que cero, se mantiene la monotonía. Por lo tanto, la función $P(t) = 4000e^{0,03t}$ es creciente y la población va en aumento.

Ejercicios de la sección 6.2

Ejercicio 1

a) $h(x) = \log_{31} x$

SOLUCIÓN

Dado que si se denota con b a la base se tiene que $b = 31 > 1$, la función es creciente.

b) $m(x) = \log_{0,41} x$

SOLUCIÓN

Al denotar con b a la base se tiene que $b = 0,41$ y como $0 < 0,41 < 1$, la función es decreciente.

c) $l(x) = \log_{213}(x)$

SOLUCIÓN

Dado que si se denota con b a la base se tiene que $b = 213 > 1$, la función es creciente.

d) $k(x) = \ln x$

SOLUCIÓN

Al denotar con b a la base se tiene que $b = e > 1$, la función es creciente.

e) $c(x) = \log x$

SOLUCIÓN

Dado que si se denota con b a la base se tiene que $b = 10 > 1$, la función es creciente.

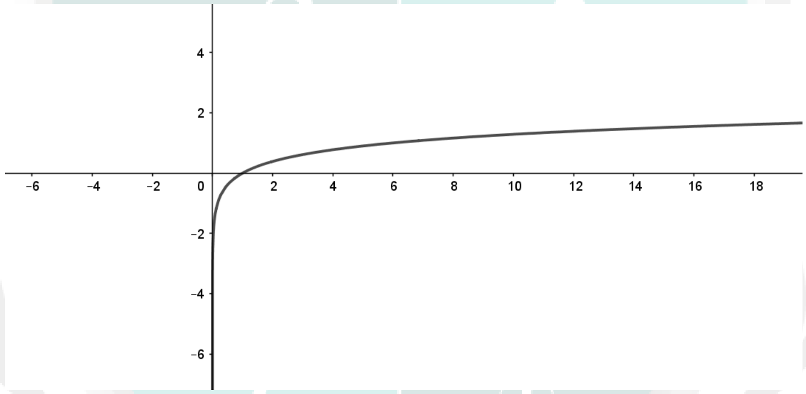
f) $c(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$

SOLUCIÓN

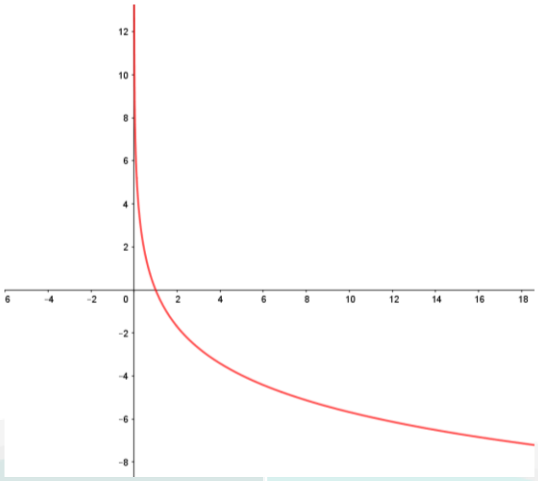
Dado que si se denota con b a la base se tiene que $b=\dfrac{1}{2}$ y como $0<\dfrac{1}{2}<1$, la función es decreciente.

Ejercicio 2

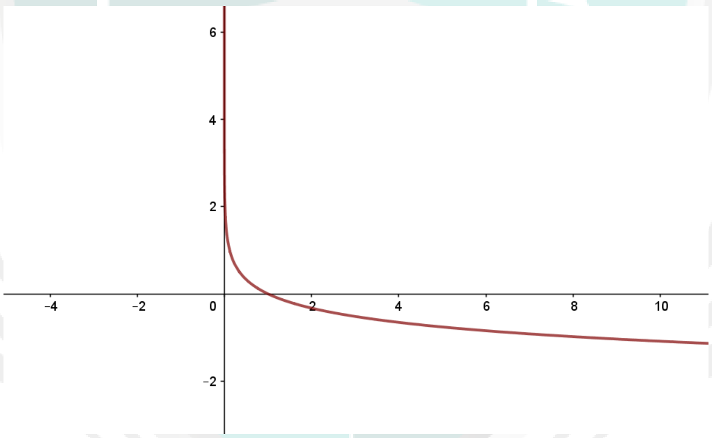
a) $f(x)=\log_6 x$



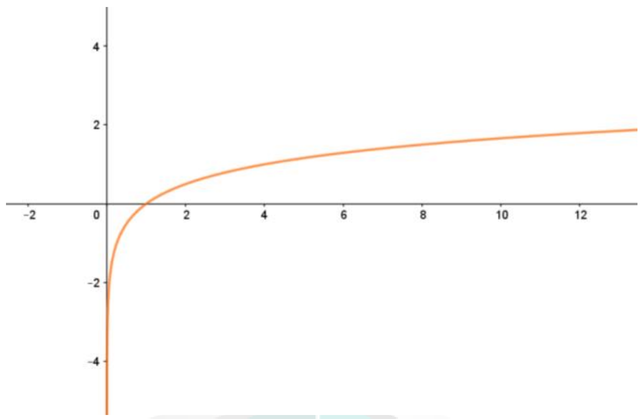
b) $c(x)=\log_{\left(\frac{2}{3}\right)} x$



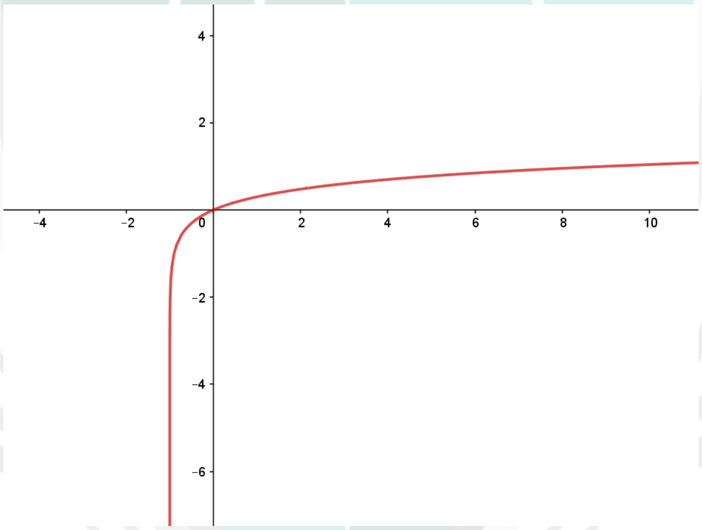
c) $m(x)=\log_{0,12} x$



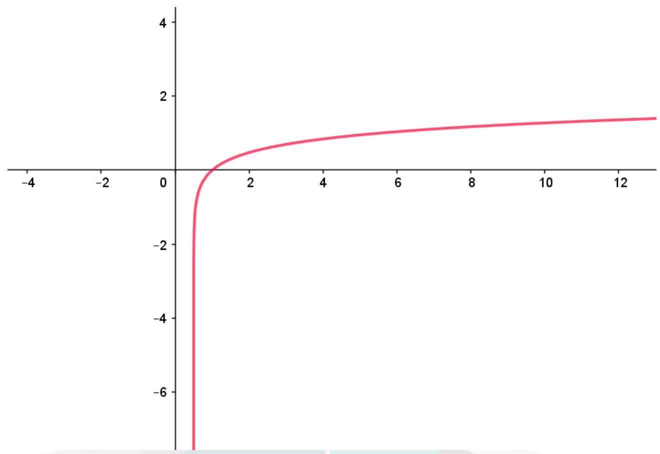
d) $f(x) = \log_4 x$



e) $l(x) = \log(x+1)$



f) $l(x)=\ln(2x-1)$



Ejercicio 3

a) $\log_{\sqrt{2}} 32$

Solución

$$
\begin{aligned}
&\log_{\sqrt{2}} 32 \\
&= \log_{\sqrt{2}} 2^5 \\
&= \log_{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2}^2\right)^5 \\
&= \log_{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2}\right)^{10} \\
&= 10 \cdot \log_{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2}\right) \\
&= 10
\end{aligned}
$$

b) 2

c) $\log_4 64 + \log_2 \sqrt{2} - \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[5]{81}$

SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
&\log_4 64 + \log_2 \sqrt{2} - \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[5]{81} \\
&= \log_4 4^3 + \log_2 2^{\frac{1}{2}} - \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[5]{3^4} \\
&= \log_4 4^3 + \log_2 2^{\frac{1}{2}} - \log_{\frac{1}{3}} 3^{\frac{4}{5}} \\
&= 3 \cdot \log_4 4 + \frac{1}{2} \cdot \log_2 2 - \frac{4}{5} \cdot \log_{\frac{1}{3}} 3 \\
&= 3 \cdot \log_4 4 + \frac{1}{2} \cdot \log_2 2 - \frac{4}{5} \cdot \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \\
&= 3 \cdot \log_4 4 + \frac{1}{2} \cdot \log_2 2 + \frac{4}{5} \cdot \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right) \\
&= 3 + \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \\
&= \frac{43}{10}
\end{aligned}
$$

d) $\dfrac{31}{5}$

e) $\log_a a\sqrt[5]{a} + \log_{\frac{1}{a}} \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}$

Solución

$$
\begin{aligned}
&\log_a a\sqrt[5]{a} + \log_{\frac{1}{a}} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}} \\
&= \log_a a \cdot a^{\frac{1}{5}} + \log_{\frac{1}{a}} \frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}} \\
&= \log_a a^{\frac{6}{5}} + \log_{\frac{1}{a}} a^{\frac{-1}{6}} \\
&= \log_a a^{\frac{6}{5}} + \log_{\frac{1}{a}} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{6}} \\
&= \frac{6}{5} \cdot \log_a a + \frac{1}{6} \cdot \log_{\frac{1}{a}} \left(\frac{1}{a}\right) \\
&= \frac{6}{5} + \frac{1}{6} \\
&= \frac{41}{30}
\end{aligned}
$$

f) $\ln\left(\dfrac{xe^{\frac{1}{4}}}{y}\right)$

g) $2\left[\ln(x-3)+\ln x\right]-\ln\left(x^2-9\right)$

SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
&2\left[\ln(x-3)+\ln x\right]-\ln\left(x^2-9\right)\\
&=2\ln(x-3)+2\ln x-\ln\left(x^2-9\right)\\
&=\ln(x-3)^2+\ln x^2-\ln\left(x^2-9\right)\\
&=\ln(x-3)^2x^2-\ln\left(x^2-9\right)\\
&=\ln\frac{(x-3)^2x^2}{\left(x^2-9\right)}\\
&=\ln\frac{(x-3)^2x^2}{(x-3)(x+3)}\\
&=\ln\frac{(x-3)x^2}{x+3}
\end{aligned}
$$

h) -3

i) $\log_7(3x)-\log_7 3+4\log_7 x-\log_7(xy)$

SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
&\log_7(3x)-\log_7 3+4\log_7 x-\log_7(xy)\\
&=\log_7(3x)-\log_7 3+\log_7 x^4-\log_7(xy)\\
&=\log_7\frac{3x}{3}+\log_7 x^4-\log_7(xy)\\
&=\log_7 x+\log_7 x^4-\log_7(xy)\\
&=\log_7 x\cdot x^4-\log_7(xy)\\
&=\log_7 x^5-\log_7(xy)\\
&=\log_7\left(\frac{x^5}{xy}\right)\\
&=\log_7\frac{x^4}{y}
\end{aligned}
$$

j)	1
k)	$\dfrac{\log_5(x+1)+\log_5(x+1)}{\log_5 \sqrt[3]{(x+1)^2}}$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
&\frac{\log_5(x+1)+\log_5(x+1)}{\log_5 \sqrt[3]{(x+1)^2}}\\
&=\frac{\log_5(x+1)(x+1)}{\log_5(x+1)^{\frac{2}{3}}}\\
&=\frac{\log_5(x+1)^2}{\log_5(x+1)^{\frac{2}{3}}}\\
&=\frac{2\log_5(x+1)}{\frac{2}{3}\log_5(x+1)}\\
&=\frac{2}{\frac{2}{3}}\\
&=3
\end{aligned}$$

l)	$\dfrac{-1}{3}$

m) $\log_{13}\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2}\right)-2\log_{13}x+\log_{13}x\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}\right)$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
&\log_{13}\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2}\right)-2\log_{13}x+\log_{13}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}\right)\\
&=\log_{13}\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2}\right)-\log_{13}x^2+\log_{13}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}\right)\\
&=\log_{13}\frac{\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2}\right)}{x^2}+\log_{13}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}\right)\\
&=\log_{13}\frac{\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}\right)}{x^2}\\
&=\log_{13}\frac{x^2+2-2}{x^2}\\
&=\log_{13}\frac{x^2}{x^2}\\
&=\log_{13}1\\
&=0
\end{aligned}$$

n) $\ln(x+3)^2$

o) $\log(xy)+7\log\left(\frac{x}{y}\right)-3\log\left(x^2y^3\right)$

SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
&\log(xy)+7\log\left(\frac{x}{y}\right)-3\log\left(x^2y^3\right)\\
&=\log x+\log y+7\left(\log x-\log y\right)-3\left(\log x^2+\log y^3\right)\\
&=\log x+\log y+7\log x-7\log y-3\left(2\log x+3\log y\right)\\
&=\log x+\log y+7\log x-7\log y-6\log x-9\log y\\
&=-15\log y+2\log x\\
&=\log\frac{1}{y^{15}}+\log x^2\\
&=\log\frac{x^2}{y^{15}}
\end{aligned}
$$

p) $\log_3\left(\dfrac{x^2 7^{x+2}}{\sqrt[3]{b}}\right)$

q) $\log\left(\frac{a}{b}\right)+\log\left(\frac{b}{a}\right)+\log\left(\frac{c}{d}\right)-\log\left(\frac{ac}{bd}\right)$

SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
&\log\left(\frac{a}{b}\right)+\log\left(\frac{b}{a}\right)+\log\left(\frac{c}{d}\right)-\log\left(\frac{ac}{bd}\right)\\
&=\log\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}\right)+\log\left(\frac{c}{d}\right)-\log\left(\frac{ac}{bd}\right)\\
&=\log(1)+\log\left(\frac{c}{d}\right)-\log\left(\frac{ac}{bd}\right)\\
&=\log\left(\frac{\frac{c}{d}}{\frac{ac}{bd}}\right)\\
&=\log\left(\frac{cbd}{dac}\right)\\
&=\log\left(\frac{b}{a}\right)
\end{aligned}
$$

r) $\ln\left(\frac{a^4y^{\frac{1}{2}}}{p^3}\right)$

Ejercicio 4

a) $\log_a\frac{x^2y}{c^3}$

SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
&\log_a\frac{x^2y}{c^3}\\
&=\log_a x^2y-\log_a c^3\\
&=\log_a x^2+\log_a y-\log_a c^3\\
&=2\log_a x+\log_a y-3\log_a c
\end{aligned}
$$

b) $2\log_a m - 2\log_a n + 3\log_a x + \log_a y - \frac{1}{2}\log_a c$

c) $\log_3 \frac{x\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^3-1}}$

SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
&\log_3 \frac{x\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^3-1}} \\
&= \log_3 x\left(x^2+1\right) - \log_3 \sqrt{x^3-1} \\
&= \log_3 x + \log_3\left(x^2+1\right) - \log_3\left(x^3-1\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \log_3 x + \log_3\left(x^2+1\right) - \frac{1}{2}\log_3\left(x^3-1\right) \\
&= \log_3 x + \log_3\left(x^2+1\right) - \frac{\log_3\left(x^3-1\right)}{2}
\end{aligned}
$$

d) $4\ln x + \frac{\ln\left(x-1\right)}{2} - \ln\left(4x-3\right)$

e) $\log\sqrt{m\sqrt{n\sqrt{x}}}$

SOLUCIÓN

$$\log\sqrt{m\sqrt{n\sqrt{x}}}$$
$$=\log\left(m\sqrt{n\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\log\left(m\sqrt{n\sqrt{x}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\log\left(m\left(n\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left[\log m+\log\left(n\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\log m+\frac{1}{2}\log\left(n\sqrt{x}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\log m+\frac{1}{2}\left(\log n+\log\sqrt{x}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\log m+\frac{1}{2}\left(\log n+\log x^{\frac{1}{2}}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\log m+\frac{1}{2}\left(\log n+\frac{1}{2}\log x\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\log m+\frac{1}{2}\log n+\frac{1}{4}\log x\right]$$
$$=\frac{1}{2}\log m+\frac{1}{4}\log n+\frac{1}{8}\log x$$

f) $\log_5 x+\frac{1}{2}\log_5 y-\frac{1}{2}\log_5 m$

g) $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{\dfrac{x^4(x+1)^3}{x+4}}$

SOLUCIÓN

$$\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{x^4(x+1)^3}{x+4}}$$

$$=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^4(x+1)^3}{x+4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^4(x+1)^3}{x+4}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\log_{\frac{1}{2}}x^4(x+1)^3-\log_{\frac{1}{2}}(x+4)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\log_{\frac{1}{2}}x^4+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)^3-\log_{\frac{1}{2}}(x+4)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[4\log_{\frac{1}{2}}x+3\log_{\frac{1}{2}}(x+1)-\log_{\frac{1}{2}}(x+4)\right]$$

$$=2\log_{\frac{1}{2}}x+\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{2}}(x+1)-\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(x+4)$$

h) $3\log_{\frac{4}{5}}x+3\log_{\frac{4}{5}}(x+1)$

Ejercicio 5

a) $f(x)=\log_2 x$ para $g(x)=\log_2 x+7$

SOLUCIÓN

Note que $g(x)=\log_2 x+7=f(x)+7$, por tanto se toma la gráfica de $f(x)=\log_2 x$ y se traslada siete unidades hacia arriba.

b) $f(x)=\log_{\left(\frac{3}{7}\right)}(x)$ para $g(x)=\log_{\left(\frac{3}{7}\right)}(x+6)$

SOLUCIÓN

Note que $g(x)=\log_{\left(\frac{3}{7}\right)}(x+6)=f(x+6)$, por tanto se toma la gráfica de

$f(x)=\log_{\left(\frac{3}{7}\right)}(x)$ y se traslada seis unidades hacia la izquierda.

c) $f(x)=\log_4 x$ para $g(x)=\log_4(x-11)$

SOLUCIÓN

Note que $g(x)=\log_4(x-11)=f(x-11)$, por tanto se toma la gráfica de

$f(x)=\log_4 x$ y se traslada once unidades hacia la derecha.

d) $f(x)=\ln(x)$ para $g(x)=\ln(x)+3$

SOLUCIÓN

Note que $g(x)=\ln(x)+3=f(x)+3$, por tanto se toma la gráfica de

$f(x)=\ln(x)$ y la desplaza 3 unidades hacia arriba.

e) $f(x)=\log(x)$ para $g(x)=\log(-x)$

SOLUCIÓN

Note que $g(x)=\log(-x)=f(-x)$, por tanto se toma la gráfica de $f(x)=\log(x)$

y la refleja sobre el eje "y".

f) $f(x)=\ln(x)$ para $g(x)=\ln(-x)+2$

SOLUCIÓN

Note que $g(x)=\ln(-x)+2=f(-x)+2$, por tanto se toma la gráfica de $f(x)=\ln(x)$, la refleja sobre el eje "y" y la desplaza 2 unidades hacia arriba.

g) $f(x)=\log(x)$ para $g(x)=\log(-x)-4$

SOLUCIÓN

Note que $g(x)=\log(-x)-4=f(-x)-4$, por tanto se toma la gráfica de $f(x)=\log(x)$, la refleja sobre el eje "y" y la desplaza 4 unidades hacia abajo.

h) $f(x)=\log_6 x$ para $g(x)=-\log_6(x)+9$

SOLUCIÓN

Note que $g(x)=-\log_6(x)+9=-f(x)+9$, por tanto se toma la gráfica de $f(x)=\log_6 x$, la refleja sobre el eje "x" y la desplaza 9 unidades hacia arriba.

i) $f(x)=\log_{21}(x)$ para $g(x)=-\log_{21}(x)-3$

SOLUCIÓN

Note que $g(x)=-\log_{21}(x)-3=-f(x)-3$, por tanto se toma la gráfica de $f(x)=\log_{21}(x)$, la refleja sobre el eje "x" y la desplaza 3 unidades hacia abajo.

j) $f(x)=\log_3(x)$ para $g(x)=4+\log_3(x+2)$

SOLUCIÓN

Note que $g(x)=4+\log_3(x+2)=4+f(x+2)$, por tanto se toma la gráfica de $f(x)=\log_3(x)$, se traslada dos unidades a la izquierda y luego cuatro unidades hacia arriba.

k) $f(x)=\log_{\left(\frac{4}{7}\right)}(x)$ para $g(x)=11-\log_{\left(\frac{4}{7}\right)}(x-3)$

SOLUCIÓN

Note que $g(x)=11-\log_{\left(\frac{4}{7}\right)}(x-3)=11-f(x-3)$, por tanto se toma la gráfica de $f(x)=\log_{\left(\frac{4}{7}\right)}(x)$, se traslada tres unidades a la derecha, luego se refleja sobre el eje x y finalmente se traslada dicha reflexión once unidades hacia arriba.

Ejercicio 6

a) $\log_5(x+1)=3$

SOLUCIÓN

Dado que el dominio de la variable corresponde a $]-1,\infty[$. Al aplicar la inversa de la función logarítmica se tiene que

$$\begin{aligned} &\log_5(x+1)=3 \\ \Leftrightarrow\ & x+1=5^3 \\ \Leftrightarrow\ & x=125-1 \\ \Leftrightarrow\ & x=124 \end{aligned}$$

Como dicho valor está en el dominio de la variable entonces la doble implicación tiene sentido, por tanto se tiene que $x=124$ es la solución de la ecuación, así $S=\{124\}$.

b) $S=\{5\}$

c) $\log x+\log 20=5$

Solución

Dado que $\log x+\log 20=5 \Rightarrow \log x=5-\log 20$

Al aplicar la inversa de la función logarítmica se tiene que

$$\begin{aligned} &\log x+\log 20=5\\ \Rightarrow &\log x=5-\log 20\\ \Rightarrow &x=10^{5-\log 20}\end{aligned}$$

Verificación

Al sustituir $x=10^{5-\log 20}$ y resolver las operaciones correspondientes se tiene que

$$\log 10^{5-\log 20}+\log 20=(5-\log 20)\log 10+\log 20=5-\log 20+\log 20=5$$

Como se satisface la igualdad se concluye que $x=10^{5-\log 20}$ es solución de la ecuación, por tanto se tiene que $S=\{10^{5-\log 20}\}$.

d) $S=\{0\}$

e) $\log(2x+3)=\log(x+5)$

Solución

Por inyectividad esto se satisface si

$$\begin{aligned} &2x+3=x+5\\ \Rightarrow &2x-x=5-3\\ \Rightarrow &x=2\end{aligned}$$

Verificación

Al sustituir $x=2$ en ambos lados de la igualdad y resolver se tiene que

○Lado izquierdo $\log(2(2)+3)=\log(4+3)=\log 7$

○Lado derecho $\log(2+5)=\log(7)$.

Como se satisface la igualdad se concluye que $x=2$ es solución.

Por tanto se tiene que $S=\{2\}$

f) $S=\{10^9\}$

g) $\log_3(2x^2+3)=\log_3(x^2+5x-3)$

Solución

Por inyectividad esto se satisface si

$$\begin{aligned}&2x^2+3=x^2+5x-3\\ \Rightarrow\ &2x^2-x^2-5x+3+3=0\\ \Rightarrow\ &x^2-5x+6=0\\ \Rightarrow\ &(x-2)(x-3)=0\\ \Rightarrow\ &\begin{cases}x-2=0\Rightarrow x=2\\ x-3=0\Rightarrow x=3\end{cases}\end{aligned}$$

Verificación

▪ Para $x=2$, al sustituir en ambos lados de la igualdad y resolver se tiene que

○Lado izquierdo $\log_3\left(2(2)^2+3\right)=\log_3(8+3)=\log_3 11$

○Lado derecho $\log_3\left((3)^2+5\cdot(3)-3\right)=\log_3(9+15-3)=\log_3 21$.

Como se satisface la igualdad se concluye que $x=2$ es solución.

▪ Para $x=3$, al sustituir en ambos lados de la igualdad y resolver se tiene que

○Lado izquierdo $\log_3\left(2(3)^2+3\right)=\log_3(18+3)=\log_3 21$

○Lado derecho $\log_3\left((2)^2+5\cdot(2)-3\right)=\log_3(4+10-3)=\log_3 11$.

Como se satisface la igualdad se concluye que $x=3$ es solución.

Por tanto se tiene que $S=\{2,3\}$

h) $S=\{1\}$

i) $\log_4(4x-1)-\log_4(x-2)=\log_4 5$

SOLUCIÓN

Note que $\log_4(4x-1)-\log_4(x-2)=\log_4 5 \Rightarrow \log_4 \frac{4x-1}{x-2}=\log 5$, por inyectividad

esto se satisface si

$$\begin{aligned}
&\frac{4x-1}{x-2}=5\\
&\Rightarrow 4x-1=5(x-2)\\
&\Rightarrow 4x-1=5x-10\\
&\Rightarrow -1+10=5x-4x\\
&\Rightarrow 9=x
\end{aligned}$$

VERIFICACIÓN

Al sustituir $x=9$ en $\log_4(4x-1)-\log_4(x-2)$ y resolver las operaciones correspondientes se tiene que

$\log_4(4\cdot 9-1)-\log_4(9-2)=\log_4 35-\log_4 7=\log_4\frac{35}{7}=\log_4 5$.

Como se satisface la igualdad se concluye que $x=9$ es solución de la ecuación, por tanto se tiene que $S=\{9\}$

j) $S=\{6\}$

k) $\log(x+1)-\log(x-1)=3$

SOLUCIÓN

Al aplicar las propiedades de los logaritmos se tiene que

$$\begin{aligned}&\log(x+1)-\log(x-1)=3\\ \Rightarrow\ &\log\frac{x+1}{x-1}=3\end{aligned}$$

Al aplicar la inversa de la función logarítmica se tiene que

$$\begin{aligned}&\log\frac{x+1}{x-1}=3\\ \Rightarrow\ &\frac{x+1}{x-1}=10^3\\ \Rightarrow\ &x+1=1000(x+1)\\ \Rightarrow\ &x+1=1000x+1000\\ \Rightarrow\ &1-1000=1000x-x\\ \Rightarrow\ &-999=999x\\ \Rightarrow\ &\frac{-999}{999}=x\\ \Rightarrow\ &-1=x\end{aligned}$$

VERIFICACIÓN

Dado que al sustituir $x=-1$ en las expresiones $\log(x+1)$ y $\log(x-1)$ ambas están indefinidas se concluye que dicho valor no es solución, así $S=\{\ \}$.

l) $S=\{7\}$

m) $2\log_2 x-\log_2(x+6)=3$

SOLUCIÓN

Al aplicar las propiedades de los logaritmos se tiene que

$$
\begin{aligned}
& 2\log_2 x - \log_2(x+6) = 3 \\
& \Rightarrow \log_2 x^2 - \log_2(x+6) = 3 \\
& \Rightarrow \log_2 \frac{x^2}{x+6} = 3 \\
& \Rightarrow \frac{x^2}{x+6} = 2^3 \\
& \Rightarrow \frac{x^2}{x+6} = 8 \\
& \Rightarrow x^2 = 8(x+6) \\
& \Rightarrow x^2 = 8x + 48 \\
& \Rightarrow x^2 - 8x - 48 = 0 \\
& \Rightarrow (x+4)(x-12) = 0 \\
& \Rightarrow \begin{cases} x+4=0 \Rightarrow x=-4 \\ x-12=0 \Rightarrow x=12 \end{cases}
\end{aligned}
$$

VERIFICACIÓN

- Para $x=-4$, se tiene que $2\log_2 x$ expresión que no está definida, por tanto se tiene que $x=-4$ no es solución de la ecuación.
- Para $x=12$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
& 2\log_2 12 - \log_2(12+6) \\
& = \log_2 12^2 - \log_2 18 \\
& = \log_2 \frac{144}{18} \\
& = \log_2 8 \\
& = \log_2 2^3 \\
& = 3\log_2 2 \\
& = 3
\end{aligned}
$$

Como se satisface la igualdad se concluye que $x=12$ es solución de la ecuación, por tanto se tiene que $S=\{12\}$

n) $S=\left\{\frac{-1}{100\,000}, \frac{1}{100\,000}\right\}$

o) $2\log x = 2 + \log(x-16)$

SOLUCIÓN

Note que

$$2\log x - \log(x-16) = 2 \Rightarrow \log x^2 - \log(x-16) = \log 10^2 \Rightarrow \log \frac{x^2}{x-16} = \log 10^2$$

Por inyectividad esto se satisface si

$$\begin{aligned} &\frac{x^2}{x-16} = 10^2 \\ &\Rightarrow x^2 = 100(x-16) \\ &\Rightarrow x^2 = 100x - 1600 \\ &\Rightarrow x^2 - 100x + 1600 = 0 \\ &\Rightarrow (x-80)(x-20) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x-80=0 \Rightarrow x = 80 \\ x-20=0 \Rightarrow x=20 \end{cases} \end{aligned}$$

VERIFICACIÓN

- Para $x = 80$, al sustituir en ambos lados de la igualdad y resolver se tiene que
  - Lado izquierdo $2\log 80 = \log 6400$
  - Lado derecho $2 + \log(80-16) = \log 10^2 + \log 64 = \log 10^2 \cdot 64 = \log 6400$
- Para $x = 20$, al sustituir en ambos lados de la igualdad y resolver se tiene que
  - Lado izquierdo $2\log 20 = \log 20^2 = \log 400$
  - Lado derecho

  $2 + \log(20-16) = 2 + \log 4 = \log 10^2 + \log 4 = \log 10^2 \cdot 4 = \log 400$.

Como se satisface la igualdad se concluye que $x = 20$ es solución.

Por tanto se tiene que $S = \{20, 80\}$.

p) $S=\{5+2\sqrt{6}\}$

q) $\dfrac{\log(16-x^2)}{\log(3x-4)}=2$

SOLUCIÓN

Note que

$$\frac{\log(16-x^2)}{\log(3x-4)}=2\Rightarrow \log(16-x^2)=2\log(3x-4)\Rightarrow \log(16-x^2)=\log(3x-4)^2.$$

Por inyectividad esto se satisface si

$$\begin{aligned}
&16-x^2=(3x-4)^2\\
&\Rightarrow 16-x^2=9x^2-24x+16\\
&\Rightarrow 0=9x^2+x^2-24x+16-16\\
&\Rightarrow 0=10x^2-24x\\
&\Rightarrow 0=2x(5x-12)\\
&\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 5x-12=0\Rightarrow x=\dfrac{12}{5}\end{cases}
\end{aligned}$$

VERIFICACIÓN

▪ Para $x=0$, al sustituir se tiene que $\dfrac{\log\left(16-(0)^2\right)}{\log(3(0)-4)}=\dfrac{\log(16)}{\log(-4)}$ pero la expresión en el denominador no está definida.

Por tanto $x=0$ no es solución.

▪ Para $x=\dfrac{12}{5}$, al sustituir y resolver se tiene que

$$\frac{\log\left(16-\left(\frac{12}{5}\right)^2\right)}{\log\left(3\left(\frac{12}{5}\right)-4\right)}=\frac{\log\left(\frac{256}{25}\right)}{\log\left(\frac{16}{5}\right)}=\frac{\log\left(\frac{16}{5}\right)^2}{\log\left(\frac{16}{5}\right)}=\frac{2\log\left(\frac{16}{5}\right)}{\log\left(\frac{16}{5}\right)}=2$$

Como se satisface la igualdad se concluye que $x=\dfrac{12}{5}$ es solución.

Por tanto se tiene que $S=\left\{\dfrac{12}{5}\right\}$.

r) $S=\left\{\sqrt[4]{\dfrac{e}{3}}\right\}$

s) $\log(-x)=1-\log(3-x)$

Solución

Al aplicar las propiedades de los logaritmos, así como la inversa de la función logarítmica se tiene que

$$\begin{aligned}
&\log(-x)=1-\log(3-x)\\
\Rightarrow\ &\log(-x)+\log(3-x)=1\\
\Rightarrow\ &\log(-x)(3-x)=1\\
\Rightarrow\ &\log\left(-3x+x^2\right)=1\\
\Rightarrow\ &-3x+x^2=10^1\\
\Rightarrow\ &-3x+x^2=10\\
\Rightarrow\ &x^2-3x-10=0\\
\Rightarrow\ &(x-5)(x+2)=0\\
\Rightarrow\ &\begin{cases}x-5=0\Rightarrow x=5\\ x+2=0\Rightarrow x=-2\end{cases}
\end{aligned}$$

Verificación

- Para $x=5$ al sustituir se tiene que
  - Lado izquierdo $\ln(-5)$ pero esta expresión no está definida.

  Por tanto $x=5$ no es solución.
- Para $x=-2$ al sustituir se tiene que
  - Lado izquierdo $\ln(--2)=\ln 2$
  - Lado derecho

  $$1-\log(3--2)=1-\log(5)=\log 10-\log 5=\log\left(\frac{10}{5}\right)=\log 2\,.$$

Como se satisface la igualdad se concluye que $x=-2$ es solución.

Así se tiene que $S=\{-2\}$.

t) $S=\{2\}$

Ejercicio 7

a) $e^{5x-2}=30$

SOLUCIÓN

Al aplicar logaritmo natural a ambos lados se tiene que

$$\begin{aligned}
& e^{5x-2} = 30 \\
\Rightarrow\ & \ln e^{5x-2} = \ln 30 \\
\Rightarrow\ & (5x-2)\ln e = \ln 30 \\
\Rightarrow\ & 5x-2 = \ln 30 \\
\Rightarrow\ & 5x = \ln 30 + 2 \\
\Rightarrow\ & x = \frac{\ln 30 + 2}{5} \\
\Rightarrow\ & x = \frac{\ln 30 + \ln e^2}{5} \\
\Rightarrow\ & x = \frac{\ln\left(30e^2\right)}{5}
\end{aligned}$$

VERIFICACIÓN

Al sustituir $x = \frac{\ln\left(30e^2\right)}{5}$ y resolver se tiene que

$$e^{5\left(\frac{\ln\left(30e^2\right)}{5}\right)-2} = e^{\ln\left(30e^2\right)-2} = e^{\ln 30 + \ln e^2 - 2} = e^{\ln 30 + 2 - 2} = e^{\ln 30} = 30$$

Como se satisface la igualdad se concluye que $\frac{\ln\left(30e^2\right)}{5}$ es solución.

Por tanto se tiene que $S = \left\{\frac{\ln\left(30e^2\right)}{5}\right\}$.

b) $S = \left\{\frac{\ln 17}{\ln 4}\right\}$

c) $3^x = 2^x$

SOLUCIÓN

Dado que

$$
\begin{aligned}
&3^x = 2^x \\
&\Rightarrow \ln 3^x = \ln 2^x \\
&\Rightarrow x\ln 3 = x\ln 2 \\
&\Rightarrow x\ln 3 - x\ln 2 = 0 \\
&\Rightarrow x(\ln 3 - \ln 2) = 0 \\
&\Rightarrow x = \frac{0}{\ln 3 - \ln 2} \\
&\Rightarrow x = 0
\end{aligned}
$$

VERIFICACIÓN

Al sustituir $x=0$ y resolver se tiene que

○ Al lado izquierdo $3^0 = 1$

○ Al lado derecho $2^0 = 1$

Como se satisface la igualdad se concluye que $x=0$ es solución.

Por tanto se tiene que $S=\{0\}$.

d) $S=\left\{\frac{2}{3}\right\}$

e) $2^{x-3}=6$

SOLUCIÓN

Al aplicar logaritmo natural a ambos lados se tiene que

$$
\begin{aligned}
&2^{x-3} = 6 \\
&\Rightarrow \ln 2^{x-3} = \ln 6 \\
&\Rightarrow x-3 = \frac{\ln 6}{\ln 2} \\
&\Rightarrow x = \frac{\ln 6}{\ln 2} + 3 \\
&\Rightarrow x = \log_2(6) + 3
\end{aligned}
$$

VERIFICACIÓN

Al sustituir $x=\log_2(6)+3$ y resolver se tiene que

$$2^{\log_2(6)+3-3}=2^{\log_2(6)}=6$$

Como se satisface la igualdad se concluye que $\log_2(6)+3$ es solución.

Por tanto se tiene que $S=\{\log_2(6)+3\}$.

f) $S=\left\{\dfrac{\ln\left(\frac{1}{98}\right)}{\ln\left(\frac{2}{2401}\right)}\right\}$

g) $3^{x-1}=2^x$

SOLUCIÓN

Al aplicar logaritmo natural a ambos lados se tiene que

$$\begin{aligned}
&3^{x-1}=2^x\\
&\Rightarrow \ln 3^{x-1}=\ln 2^x\\
&\Rightarrow (x-1)\ln 3=x\ln 2\\
&\Rightarrow x\ln 3-\ln 3=x\ln 2\\
&\Rightarrow x\ln 3-x\ln 2=\ln 3\\
&\Rightarrow x(\ln 3-\ln 2)=\ln 3\\
&\Rightarrow x=\frac{\ln 3}{\ln 3-\ln 2}
\end{aligned}$$

VERIFICACIÓN

Note que $3^{x-1}=2^x\Rightarrow\dfrac{3^{x-1}}{2^x}=1\Rightarrow\dfrac{3^x\cdot 3^{-1}}{2^x}=1\Rightarrow\dfrac{3^x}{2^x\cdot 3}=1\Rightarrow\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=3$.

Al sustituir $x=\frac{\ln 3}{\ln 3-\ln 2}=\frac{\ln 3}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}=\log_{\frac{3}{2}}3$ y resolver las operaciones indicadas se

tiene que

Como se satisface la igualdad se concluye que $x=\log_{\frac{3}{2}}3$ es solución.

Por tanto se tiene que $S=\left\{\log_{\frac{3}{2}}3\right\}$.

h) $S=\left\{\frac{\ln 5}{2(\ln 2+\ln 5)}\right\}$

i) $e^{4x-2}=28$

SOLUCIÓN

Al aplicar logaritmo natural a ambos lados se tiene que

$$\begin{aligned}
&e^{4x-2}=28\\
&\Rightarrow \ln e^{4x-2}=\ln 28\\
&\Rightarrow (4x-2)\ln e=\ln 28\\
&\Rightarrow 4x-2=\ln 28\\
&\Rightarrow 4x=\ln 28+2\\
&\Rightarrow x=\frac{\ln 28+2}{4}
\end{aligned}$$

VERIFICACIÓN

Al sustituir $x=\frac{\ln 28+2}{4}$ y resolver las operaciones indicadas se tiene que

$$e^{4\left(\frac{\ln 28+2}{4}\right)-2}=e^{\ln 28+2-2}=e^{\ln 28}=28$$

Como se satisface la igualdad se concluye que $x=\dfrac{\ln 28+2}{4}$ es solución.

Por tanto se tiene que $S=\left\{\dfrac{\ln 28+2}{4}\right\}$.

j) $S=\{\ln 3\}$

Ejercicio 8

a) $g(x)=\log_3(x+2)$

a. El punto en el cual la gráfica de dicha función interseca al eje y.

SOLUCIÓN

La gráfica de la función interseca el eje y cuando el valor de la coordenada x es cero. Por tanto se debe calcular $g(0)$ así $g(0)=\log_3(0+2)=\log_3(2)$.

Por tanto la gráfica de la función interseca al eje y en el punto $(0,\log_3 2)$.

b. El punto en el cual la gráfica de dicha función interseca al eje x.

SOLUCIÓN

La gráfica de la función interseca el eje x cuando el valor de la coordenada y es cero. Por tanto se debe resolver $\log_3(x+2)=0$ con lo cual

$$\begin{aligned}
&\log_3(x+2)=0\\
&\Rightarrow x+2=3^0\\
&\Rightarrow x=1-2\\
&\Rightarrow x=-1
\end{aligned}$$

Por tanto la gráfica de la función interseca al eje y en el punto $(-1,0)$.

b) $h(x) = 2^x + 3$

a. El punto en el cual la gráfica de dicha función interseca al eje y.

SOLUCIÓN

La gráfica de la función interseca el eje y, cuando el valor de la coordenada x es cero. Por tanto se debe calcular $h(0)$ así $h(0) = 2^0 + 3 = 4$.

Por tanto se concluye que la gráfica de la función interseca al eje y en el punto $(0,4)$.

b. El punto en el cual la gráfica de dicha función interseca al eje x.

SOLUCIÓN

La gráfica de la función interseca el eje x, cuando el valor de la coordenada y es cero. Por tanto se debe resolver $2^x + 3 = 0$ para lo cual

$$2^x + 3 = 0$$
$$\Rightarrow 2^x = -3$$

Pero esta ecuación no tiene solución.

Por tanto, se concluye que la gráfica de la función no interseca al eje x.

c) $g(x) = 3 \cdot 4^x$

a. El punto en el cual la gráfica de dicha función interseca al eje y.

SOLUCIÓN

La gráfica de la función interseca el eje y, cuando el valor de la coordenada x es cero. Por tanto se debe calcular $g(0)$ así $g(0) = 3 \cdot 4^0 = 3 \cdot 1 = 3$.

Por tanto se concluye que la gráfica de la función interseca al eje y en el punto $(0,3)$.

b. El punto en el cual la gráfica de dicha función interseca al eje x.

SOLUCIÓN

La gráfica de la función interseca el eje x, cuando el valor de la coordenada y es cero. Por tanto se debe resolver $3\cdot 4^x = 0$ para lo cual

$$3\cdot 4^x = 0$$
$$\Rightarrow 4^x = \frac{0}{3}$$
$$\Rightarrow 4^x = 0$$

Pero esta ecuación no tiene solución.

Por tanto, se concluye que la gráfica de la función no interseca al eje x.

d) $k(x) = 5\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} - 10$

a. El punto en el cual la gráfica de dicha función interseca al eje y.

SOLUCIÓN

La gráfica de la función interseca el eje y, cuando el valor de la coordenada x es cero. Por tanto se debe calcular $k(0)$ así

$$k(0) = 5\left(\frac{1}{3}\right)^{0+2} - 10 = 5\left(\frac{1}{3}\right)^{2} - 10 = \frac{5}{9} - 10 = \frac{-85}{9}.$$

Por tanto se concluye que la gráfica de la función interseca al eje y en el punto $\left(0, \frac{-85}{9}\right)$.

b. El punto en el cual la gráfica de dicha función interseca al eje x.

SOLUCIÓN

La gráfica de la función interseca el eje x, cuando el valor de la coordenada y es cero. Por tanto se debe resolver $5\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} - 10 = 0$ para lo cual

$$5\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}-10=0$$

$$\Rightarrow 5\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}=10$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}=\frac{10}{5}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}=2$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}=\ln 2$$

$$\Rightarrow (x+2)\ln\left(\frac{1}{3}\right)=\ln 2$$

$$\Rightarrow (x+2)\ln\left(3^{-1}\right)=\ln 2$$

$$\Rightarrow (x+2)=\frac{\ln 2}{-\ln 3}$$

$$\Rightarrow x=\frac{-\ln 2}{\ln 3}-2$$

Por tanto se concluye que la gráfica de la función interseca al eje x en el punto $\left(\frac{-\ln 2}{\ln 3}-2,0\right)$.

e) $m(x)=1-7\cdot 7^{3-4x}$

a. El punto en el cual la gráfica de dicha función interseca al eje y.

SOLUCIÓN

La gráfica de la función interseca el eje y, cuando el valor de la coordenada x es cero. Por tanto se debe calcular $m(0)$ así

$m(0)=1-7\cdot 7^{3-4\cdot 0}=1-7\cdot 7^{3}=1-7^{4}=-2400$.

Por tanto se concluye que la gráfica de la función interseca al eje y en el punto $(0,-2400)$.

b. El punto en el cual la gráfica de dicha función interseca al eje x.

SOLUCIÓN

La gráfica de la función interseca el eje x, cuando el valor de la coordenada y es cero. Por tanto se debe resolver $1-7\cdot 7^{3-4x}=0$ para lo cual

$$\begin{aligned}
&1-7\cdot 7^{3-4x}=0\\
\Rightarrow\ &1=7\cdot 7^{3-4x}\\
\Rightarrow\ &1=7^{4-4x}\\
\Rightarrow\ &7^{0}=7^{4-4x}\\
\Rightarrow\ &0=4-4x\\
\Rightarrow\ &4x=4\\
\Rightarrow\ &x=\frac{4}{4}\\
\Rightarrow\ &x=1
\end{aligned}$$

Por tanto se concluye que la gráfica de la función interseca al eje x en el punto $(1,0)$.

Ejercicio 9

Dado que $\log_b x=y$ si se satisface que $x=b^y$; al aplicar logaritmo en base c a ambos lados se tiene

$$\begin{aligned}
&x=b^{y}\\
\Rightarrow\ &\log_c x=\log_c b^{y}\\
\Rightarrow\ &\log_c x=y\log_c b\\
\Rightarrow\ &\frac{\log_c x}{\log_c b}=y
\end{aligned}$$

Con lo cual se demuestra que $\log_b x = \dfrac{\log_c x}{\log_c b}$. Este corresponde al cambio de base.

Ejercicio 10

Sea $y = a^{\log_a x}$ así se tiene que

$$\begin{aligned} & y = a^{\log_a x} \\ \Rightarrow\ & \log_a y = \log_a a^{\log_a x} \\ \Rightarrow\ & \log_a y = \log_a x \log_a a \\ \Rightarrow\ & \log_a y = \log_a x \\ \Rightarrow\ & y = x \end{aligned}$$

Como $y = a^{\log_a x}$ se tiene que $a^{\log_a x} = x$. Con lo cual se demuestra lo solicitado.

Ejercicio 11

De acuerdo con la información dada se debe satisfacer que $b^{-2} = \dfrac{1}{16}$.

Al resolver dicha ecuación se tiene que

$$\begin{aligned} & b^{-2} = 4^{-2} \\ \Leftrightarrow\ & b = 4 \end{aligned}$$

Por tanto, el valor de la base b es 4.

Ejercicio 12

$$f(-2) = \left(\frac{3}{7}\right)^{-2} = \frac{49}{9}$$

$$f(4) = \left(\frac{3}{7}\right)^{4} = \frac{81}{2401}$$

Ejercicios de la sección 6.3

Ejercicio 1

a) El modelo de crecimiento $P(t)$ para dicho cultivo.

SOLUCIÓN

Como la población inicial es P_0, si después de 4 horas se duplica, entonces habría $2P_0$. Así se tiene que $P(4) = P_0 e^{k\cdot 4} = 2P_0$.

Al resolver dicha ecuación permite obtener el valor de k. Así

$$\begin{aligned} & P_0 e^{k\cdot 4} = 2P_0 \\ \Rightarrow\ & e^{k\cdot 4} = \frac{2P_0}{P_0} \\ \Rightarrow\ & e^{k\cdot 4} = 2 \\ \Rightarrow\ & \ln e^{k\cdot 4} = \ln 2 \\ \Rightarrow\ & 4k \ln e = \ln 2 \\ \Rightarrow\ & k = \frac{\ln 2}{4} \approx 0{,}17328679 \end{aligned}$$

Por tanto el modelo de crecimiento $P(t)$ para dicho cultivo corresponde a

$$P(t) = P_0 e^{\frac{\ln 2}{4}t} = P_0 e^{0{,}17328679t}.$$

Note además que al aplicar las propiedades de las funciones exponenciales dicha función también puede escribirse de la forma

$$P(t) = P_0 e^{\frac{\ln 2}{4}t} = P_0 \left(e^{\ln 2^{\frac{1}{4}}} \right)^t = P_0 \sqrt[4]{2}^{\,t}.$$

b) La cantidad aproximada de bacterias al cabo de 12 horas, si al inicio hay 2000 bacterias.

SOLUCIÓN

Dado que $P(t)=P_0 e^{\frac{\ln 2}{4}t}=P_0 e^{0,17328679t}$, se debe resolver

$$P(12)=2000\,e^{\frac{\ln 2}{4}\cdot 12}=2000\,e^{3\ln 2}=2000e^{\ln 2^3}=2000.2^3=16\,000$$

Por tanto al cabo de 12 horas, si el comportamiento obedece a la función

$P(t)=P_0 e^{\frac{\ln 2}{4}t}=P_0 e^{0,17328679t}$ habría 16 000 bacterias.

c) El número de horas que debe transcurrir para que haya 32 000 bacterias si al inicio había 2000.

SOLUCIÓN

Por las condiciones se deberá resolver

$32\,000=2000e^{\frac{\ln 2}{4}t}\Rightarrow \dfrac{32\,000}{2000}=e^{\frac{\ln 2}{4}t}\Rightarrow 16=\left(\sqrt[4]{2}\right)^t\Rightarrow 2^4=2^{\frac{t}{4}}$, dicha ecuación se satisface si $4=\dfrac{t}{4}\Rightarrow 16=t$.

Por tanto, al cabo de 12 horas habrá 32 000 bacterias.

Ejercicio 2

Por las condiciones descritas, se tiene que $P(t)=10\,000e^{0,4t}$. Así, se debe calcular $P(3)$ para saber la cantidad de bacterias al cabo de 3 horas.

$$P(3)=10\,000e^{0,04\cdot 3}=10\,000e^{0,12}\approx 11\,274,96\,.$$

Por lo tanto, al cabo de 3 horas, la cantidad de bacterias se aproxima a 11 275.

Ejercicio 3

Como la solución es neutra se tiene que $pH=7$. Por tanto, se deberá resolver

$$7=-\log\left[H^{+}\right]$$
$$\Rightarrow -7=\log\left[H^{+}\right]$$
$$\Rightarrow 10^{-7}=H^{+}$$

Así la cantidad de iones de hidrógeno de una solución neutra es de 10^{-7}.

Ejercicio 4

a) Dado que $I=10\,000I_0$, se tiene lo siguiente:

$$L(I)=10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)=10\log\left(\frac{10\,000I_0}{I_0}\right)=10\log\left(10^4\right)=4\cdot 10\log(10)=40.$$

Por lo tanto, el volumen del sonido es de 40 dB.

b) Dado que $L=90$, entonces

$$90=10\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{90}{10}=\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$$
$$\Rightarrow 9=\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$$
$$\Rightarrow 10^{9}=\frac{I}{10^{-12}}$$
$$\Rightarrow 10^{9}\cdot 10^{-12}=I$$
$$\Rightarrow 10^{-3}=I$$
$$\Rightarrow 0,001=I.$$

Por lo tanto, la intensidad del sonido es de 0,001 W/m^2.

Ejercicio 5

Dado que

$$\begin{aligned}
& p = 20^{2-0,3x} \\
\Rightarrow & \ln p = \ln 20^{2-0,3x} \\
\Rightarrow & \ln p = (2-0,3x)\ln 20 \\
\Rightarrow & \frac{\ln p}{\ln 20} = 2-0,3x \\
\Rightarrow & 0,3x = 2-\frac{\ln p}{\ln 20} \\
\Rightarrow & x = \frac{2-\frac{\ln p}{\ln 20}}{0,3} \\
\Rightarrow & x = \frac{3}{10}\left(2-\frac{\ln p}{\ln x}\right)
\end{aligned}$$

Por tanto al determinar x en función de p, se tiene que $x = \frac{3}{10}\left(2-\frac{\ln p}{\ln x}\right)$.

Ejercicio 6

a)	Se debe calcular $d(25)$. Así, $d(25) = 450e^{-0,25\cdot 25} \approx 0,8687$. En consecuencia, si el precio es de \$25, la demanda tiende a 869 unidades por mes.
b)	Se debe resolver $3 = 450e^{-0,25p}$; así:

$$
\begin{aligned}
&3 = 450e^{-0,25p} \\
&\Rightarrow \frac{3}{450} = e^{-0,25p} \\
&\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{150}\right) = \ln e^{-0,25p} \\
&\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{150}\right) = -0,25p \\
&\Rightarrow \frac{\ln\left(\frac{1}{150}\right)}{-0,25} = p \\
&\Rightarrow 20 \approx p.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el precio debe ser de \$20, aproximadamente, para que la demanda sea de 3000 unidades.

Ejercicio 7

a) Como la tasa es compuesta continuamente, se debe calcular

$$c(2) = 2\,500\,000e^{0,13\cdot 2} \approx 3\,242\,325,217 .$$

Por lo tanto, al cabo de 2 años, se acumulan ₡3 242 325,217, con ₡742 325,2167 de intereses.

b) Para este problema, se debe resolver

$$\begin{aligned} & 4\,788\,852{,}073 = 2\,500\,000 e^{0{,}13\cdot t} \\ \Rightarrow\ & \frac{4\,788\,852{,}073}{2\,500\,000} = e^{0{,}13\cdot t} \\ \Rightarrow\ & \ln\left(1{,}915540829\right) \approx \ln e^{0{,}13\cdot t} \\ \Rightarrow\ & \ln\left(1{,}915540829\right) \approx 0{,}13t \\ \Rightarrow\ & \frac{\ln\left(1{,}915540829\right)}{0{,}13} \approx t \\ \Rightarrow\ & 5 \approx t. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para que el capital acumulado sea de ₡4 788 852,073, deberán transcurrir 5 años.

Ejercicio 8

Por las condiciones dadas, se calcula $c(7)$; así,

$$c(7) = 3000000\left(1+\frac{0{,}06}{2}\right)^{2\cdot 7} \approx 4537769{,}175$$

Por lo tanto, al cabo de 7 años, se acumulan ₡4 537 769,175.

Ejercicio 9

Se debe resolver

$$\begin{aligned} & 5{,}5 = \log\left(\frac{1}{h}\right) \\ \Rightarrow\ & 10^{5{,}5} = \frac{1}{h} \\ \Rightarrow\ & h = \frac{1}{10^{5{,}5}} \\ \Rightarrow\ & h \approx 0{,}000003162 \end{aligned}$$

Por tanto, el valor de h es de aproximadamente 0,000003162.

Ejercicio 10

Se debe resolver la ecuación

$$\begin{aligned} 9 &= -\log\left[H^+\right] \\ \Rightarrow -9 &= \log\left[H^+\right] \\ \Rightarrow 10^{-9} &= H^+. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la concentración de $\left[H^+\right]$ es de 10^{-9}.

Ejercicio 11

Se debe calcular

$$\begin{aligned} pH &= -\log\left[3\cdot 10^{-4}\right] \\ \Rightarrow pH &\approx 3{,}5228. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el pH del vinagre es de 3,5228.

Ejercicio 12

Dado que la cantidad de muestra con el paso del tiempo obedece a la función

$C(t) = 70\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$, con t en minutos, se debe calcular $C(15)$.

$$C(15) = 70\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{15}{3}} = 70\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5} = 70\cdot\frac{1}{32} = 2{,}1875.$$

Así, al cabo de 15 minutos, la cantidad de talio disponible será de 2,1875 g.

Ejercicio 13

$$\frac{I_o}{2}=I_0 4^{-1,4x}\Rightarrow\frac{I_o}{2I_0}=e^{-1,4x}\Rightarrow\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\ln e^{-1,4x}\Rightarrow\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-1,4x\Rightarrow\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-1,4}=x\Rightarrow 0,495\approx x.$$

Por lo tanto, si la intensidad del rayo es la mitad de su valor en la superficie, su profundidad es de 0,495 m.

Ejercicios de autoevaluación

Ejercicio 1

Note que $m(x)=1+f(x)=1+a^x$ y $m(-x)=1+f(-x)=1+a^{-x}$; por lo tanto,

$$\frac{1}{m(x)}+\frac{1}{m(-x)}=\frac{1}{1+a^x}+\frac{1}{1+a^{-x}}=\frac{1}{1+a^x}+\frac{1}{1+\frac{1}{a^x}}=\frac{1}{1+a^x}+\frac{1}{\frac{a^x+1}{a^x}}=\frac{1}{1+a^x}+\frac{a^x}{a^x+1}$$

$$=\frac{1}{1+a^x}+\frac{a^x}{1+a^x}=\frac{1+a^x}{1+a^x}=1$$

Demostrándose así lo solicitado.

Ejercicio 2

$$\begin{aligned}
&\left[f(x)\right]^2-\left[g(x)\right]^2\\
&=\left[\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right]^2-\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]^2\\
&=\frac{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}{4}-\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)^2}{4}\\
&=\left(\frac{e^{2x}}{4}+\frac{2e^xe^{-x}}{4}+\frac{e^{-2x}}{4}\right)-\left(\frac{e^{2x}}{4}-\frac{2e^xe^{-x}}{4}+\frac{e^{-2x}}{4}\right)\\
&=\frac{e^{2x}}{4}+\frac{1}{2}+\frac{e^{-2x}}{4}-\frac{e^{2x}}{4}+\frac{1}{2}-\frac{e^{-2x}}{4}\\
&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\\
&=1
\end{aligned}$$

Demostrándose así lo solicitado.

Ejercicio 3

$$\begin{aligned}
&\sqrt[5]{\frac{3^{5x+2}}{9}} = 27 \\
\Leftrightarrow\ &\sqrt[5]{\frac{3^{5x+2}}{9}} = (27)^5 \\
\Leftrightarrow\ &\frac{3^{5x+2}}{9} = \left(3^3\right)^5 \\
\Leftrightarrow\ &3^{5x+2} = 9\cdot 3^{15} \\
\Leftrightarrow\ &3^{5x+2} = 3^2\cdot 3^{15} \\
\Leftrightarrow\ &3^{5x+2} = 3^{17} \\
\Leftrightarrow\ &5x+2 = 17 \\
\Leftrightarrow\ &5x = 17-2 \\
\Leftrightarrow\ &5x = 15 \\
\Leftrightarrow\ &x = \frac{15}{5} \\
\Leftrightarrow\ &x = 3
\end{aligned}$$

Dada la doble implicación, se tiene que $x=3$ es solución y, por lo tanto, $S=\{3\}$.

Ejercicio 4

$$\begin{aligned}
&f(x) = g(x) \\
\Leftrightarrow\ &25^{3x} = \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2+5} \\
\Leftrightarrow\ &\left(5^2\right)^{3x} = \left(5^{-1}\right)^{x^2+5} \\
\Leftrightarrow\ &(5)^{6x} = (5)^{-x^2-5} \\
\Leftrightarrow\ &6x = -x^2-5 \\
\Leftrightarrow\ &x^2+6x+5 = 0 \\
\Leftrightarrow\ &(x+1)(x+5) = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases} x+1=0 \Leftrightarrow x=-1 \\ x+5=0 \Leftrightarrow x=-5 \end{cases}
\end{aligned}$$

Esto implica que los valores para los cuales se satisface la igual son $x=-5$ y $x=-1$.

Ejercicio 5

Dado que $x>0$, al aplicar logaritmo natural a ambos lados, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} & x^x = x^6 \\ \Rightarrow\ & \ln x^x = \ln x^6 \\ \Rightarrow\ & x\ln x = 6\ln x \\ \Rightarrow\ & x\ln x - 6\ln x = 0 \\ \Rightarrow\ & \ln x\left(x-6\right) = 0 \\ \Rightarrow\ & \begin{cases} \ln x = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x-6=0 \Rightarrow x=6 \end{cases} \end{aligned}$$

VERIFICACIÓN

- Para $x=1$:
  - Lado izquierdo: $1^1=1$
  - Lado derecho: $1^6=1$

  Como se satisface la igualdad, se concluye que $x=1$ es solución.

- Para $x=6$:
  - Lado izquierdo: $6^6=46656$
  - Lado derecho: $6^6=46656$

  Como se satisface la igualdad, se concluye que $x=6$ también es solución.

Por lo tanto, $S=\{1,6\}$.

Ejercicio 6

Sea $y = e^{\ln(x)}$, al aplicar logaritmo natural a ambos lados, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} & y = e^{\ln(x)} \\ \Leftrightarrow\ & \ln y = \ln e^{\ln(x)} \\ \Leftrightarrow\ & \ln y = \ln x \cdot \ln e \\ \Leftrightarrow\ & \ln y = \ln x \\ \Leftrightarrow\ & y = x. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se verifica que $e^{\ln(x)} = x$.

Ejercicio 7

Note que $(\log_3 x)^2 + \log_3 x = 2 \Leftrightarrow (\log_3 x)^2 + \log_3 x - 2 = 0$, al realizar el cambio de variable $u = \log_3 x$, resulta

$$\begin{aligned} & (\log_3 x)^2 + \log_3 x - 2 = 0 \\ \Rightarrow\ & u^2 + u - 2 = 0 \\ \Rightarrow\ & (u+2)(u-1) = 0 \\ \Rightarrow\ & \begin{cases} u + 2 = 0 \Rightarrow u = -2, \\ u - 1 = 0 \Rightarrow u = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Como $u = \log_3 x$,

- para $u = -2$, se debe resolver $-2 = \log_3 x \Leftrightarrow 3^{-2} = x \Leftrightarrow \frac{1}{9} = x$.
- para $u = 1$, se debe resolver $1 = \log_3 x \Leftrightarrow 3^1 = x \Leftrightarrow 3 = x$.

Verificación

- Para $x = \frac{1}{9}$, se tiene que:

$$\left(\log_3 \frac{1}{9}\right)^2 + \log_3 \frac{1}{9} = \left(\log_3 3^{-2}\right)^2 + \log_3 3^{-2} = \left(-2\log_3 3\right)^2 - 2\log_3 3 = (-2)^2 - 2 = 4 - 2 = 2$$

Por lo tanto, $x = \dfrac{1}{9}$ es solución de la ecuación.

- Para $x = 3$, se tiene que:

$$(\log_3 3)^2 + \log_3 3 = (1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2\,.$$

Así, $x = 3$ es solución de la ecuación.

Por lo tanto, $S = \left\{\dfrac{1}{9}, 3\right\}$

Fuentes consultadas

Ávila, J. (2003). *Álgebra y Trigonometría*. Cartago: Editorial Tecnológica.

Barrantes, H. (2005). *Introducción a la Matemática*. San José, Costa Rica: EUNED.

Barrantes, H. (2010). *Matemática Básica para Administración*. San José, Costa Rica: EUNED.

Chacel, R. (s. f.). George Polya. Estrategias para la resolución de problemas. Recuperado de http://ficus.pntic.mec.es/fheb0005/Hojas_varias/Material_de_apoyo/-Estrategias%20de%20Polya.pdf

Goodman, A. y Hirsch, L. (1996). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México: Prentice Hall.

Larson, R. y Hostetler, R. (2010). *Precálculo* (7.ª ed.). México, D. F.: Editorial Reverté S. A.

Ministerio de Hacienda (2017). Impuesto sobre la renta (régimen tradicional). Recuperado de http://www.hacienda.go.cr/contenido/12994-regimen-tradicional

Murillo, M., Soto, A. y Araya, J. (2003). *Matemática básica con aplicaciones*. San José, Costa Rica: EUNED.

Paul, R. y Haeussler, E. (2003). *Matemáticas para administración y economía* (10.ª ed.). México: Pearson.

Ruiz, A. (2003). *Historia y Filosofía de las matemáticas*. San José, Costa Rica: EUNED.

Sullivan, M. (2013). *Álgebra y Trigonometría* (9.ª ed.). México, D. F.: Pearson.

Zill, D. y Wright, W. (2011). *Cálculo. Trascendentes tempranas* (4.ª ed.). México, D. F.: McGraw-Hill.