Ejercicios de la sección 5.1

Ejercicio 1

a)	La relación no es una función, ya que el 0 no tiene ningún elemento asociado.
b)	Sí es función.
c)	Sí es función.
d)	No es función, pues el 0 tiene dos imágenes.

Ejercicio 2

a)	Dominio: $\{2,4,6,8,10\}$, Codominio: $\mathbb{Z}$, Ámbito: $\{2,3,4,5,6\}$ porque $f(2)=2$, $f(4)=3$, $f(6)=4$, $f(8)=5$ y $f(10)=6$.
b)	Dominio: $\{-2,-1,0,1,2\}$, Codominio: $\mathbb{R}$, Ámbito: $\left\{\frac{-13}{3},-3,\frac{-5}{3},\frac{-1}{3},1\right\}$
c)	Dominio: $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$, Codominio: $\mathbb{R}$, Ámbito: $\{0,2,8,18\}$ porque $h(-3)=18$, $h(-2)=8$, $h(-1)=2$, $h(0)=0$, $h(1)=2$, $h(2)=8$ y $h(3)=18$.
d)	Dominio: $\mathbb{R}$, Codominio: $\mathbb{R}$, Ámbito: $\mathbb{R}$

e) Dominio: $\mathbb{R}$, Codominio: $\mathbb{R}$, Ámbito: $[0,+\infty[$ porque para cualquier elemento del dominio ($\mathbb{R}$) su imagen será 0 o un número positivo por leyes de potencias.	
f) Dominio: $[2,3[$, Codominio: $\mathbb{R}$, Ámbito: $[5,6[$	

Ejercicio 3

a)	La imagen de 5 se calcula sustituyendo, así $h(5)=2\cdot 5+3=13$
b)	-3
c)	La preimagen de 0, se calcula $0=2x+3 \Rightarrow \frac{-3}{2}=x$
d)	2
e)	La imagen de -3 se calcula: $h(-3)=2\cdot -3+3=-3$
f)	11
g)	La imagen de k se calcula: $h(k)=2k+3,\ k\in\mathbb{Z}$
h)	$2k+5$

Ejercicio 4

a)	$f(-1)=(-1)^2+2(-1)+1=0$ y $0=x^2+2x+1 \Rightarrow 0=(x+1)^2 \Rightarrow x=-1$.
b)	La imagen de -1 es -2 y la preimagen de 0 es 1.
c)	$g(-1)=\sqrt{(-1)^2+8}=3$ y $0=\sqrt{x^2+8} \Rightarrow 0=x^2+8 \Rightarrow -8=x^2$, por lo que no existe preimagen de 0.
d)	La imagen de -1 es 24 y la preimagen de 0 es $\frac{13}{11}$
e)	$h(-1)=\frac{2\cdot -1+1}{3}=-\frac{1}{3}$ y $0=\frac{2x+1}{3} \Rightarrow 0=2x+1 \Rightarrow -\frac{1}{2}=x$.
f)	La imagen de -1 es -3 y la preimagen de 0 es $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$
g)	$h(-1)=\frac{1}{-1}+5=4$ y $0=\frac{1}{x}+5 \Rightarrow -5=\frac{1}{x} \Rightarrow -\frac{1}{5}$
h)	La imagen de -1 es $-\sqrt[3]{12}$ y la preimagen de 0 es 5

Ejercicio 5

a)	$D_f=\mathbb{R}$
b)	$D_f=\mathbb{R}$

c)	Se debe analizar cuando se anula el denominador, así $x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2$ y $D_w=\mathbb{R}-\{-2,2\}$.
d)	$D_g=\mathbb{R}-\left\{0,\frac{5}{4}\right\}$.
e)	Se debe analizar cuando se anula el denominador, así $2x^2+9x+4=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$ y $x=-4$. $D_g=\mathbb{R}-\left\{-4,-\frac{1}{2}\right\}$.
f)	$D_t=[-3,+\infty[$.
g)	Se debe analizar cuando $5-2x\geq 0$ de donde $5-2x\geq 0 \Rightarrow 5\geq 2x \Rightarrow \frac{5}{2}\geq x$. Por lo tanto $D_f=\left]-\infty,\frac{5}{2}\right[$.
h)	$D_g=\mathbb{R}$
i)	Se debe analizar $x+2>0$ de donde $x>-2$ y $D_h=]-2,+\infty[$.
j)	$D_h=]-\infty,3[$.
k)	Se debe analizar cuando se anulan los denominadores, así $x+4=0 \Rightarrow x=-4$ y $x-5=0 \Rightarrow x=5$ por lo cual $D_g=\mathbb{R}-\{-4,5\}$.
l)	$D_g=\mathbb{R}-\left\{0,\frac{1}{3}\right\}$.

m) Se debe analizar cuando $\frac{x}{x-2} \geq 0$, de donde $D_f =]-\infty, 0] \cup]2, +\infty[$.

Intervalo	$]-\infty, 0]$	$[0, 2[$	$]2, +\infty[$
x	-	+	+
$x-2$	-	-	+
signo	+	-	+

n) $D_p =]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$.

o) A ser raíz cúbica, se analiza cuando se anula el denominador, esto es $x+7=0 \Rightarrow x=-7$, de donde $D_g = \mathbb{R} - \{7\}$.

p) $D_t =]-\infty, 1[$

Ejercicio 6

El volumen de un prisma se calcula multiplicando área basal x altura. La base es un triángulo isósceles, por lo que si denotamos x la medida del lado desigual la altura se determina mediante Pitágoras $h^2 = 1,2^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2$, luego el área de la base está dada por $A_\triangle = x \cdot \sqrt{1,44 - \frac{x^2}{4}}$ y el volumen será $V(x) = 7x\sqrt{1,44 - \frac{x^2}{4}} = \frac{7}{2}x\sqrt{5,76 - x^2}$. El dominio será $\left]0 , \frac{12}{5}\right[$.

Ejercicio 7

a)	Al sustituir $-x$ por x se tiene $h(-x)=\frac{(-x)^3}{2(-x)-5(-x)^5}=\frac{-x^3}{-2x+5x^5}=\frac{-x^3}{-(2x-5x^5)}=\frac{x^3}{2x-5x^5}$. Por lo que se concluye que h es función par.
b)	Par
c)	Al sustituir $-x$ por x se tiene $g(-x)=\frac{3(-x)^3}{(-x)^2-7}=\frac{-3x^3}{x^2-7}=-\frac{3x^3}{x^2-7}$. Por lo que se concluye que g es función impar.
d)	Impar
e)	Al sustituir $-x$ por x se tiene $h(-x)=\frac{(-x)^4-1}{3(-x)-1}=\frac{x^4-1}{-3x-1}$. Por lo que se concluye que h no es par ni impar.
f)	Ni par ni impar

Ejercicio 8

a)	Dominio: $[-3,+\infty[$, ámbito: $[-2,+\infty[$, $f(0)=-2$, crece: $]1,+\infty[$, decrece: $]-3,-1[$, constante: $]-1,1[$.

b)	Dominio: $]-2,2]$, ámbito: $[-2,2]$, $f(0)=0$, crece: $]-2,-1[$ y $]1,2[$, decrece: $]-1,1[$ no hay intervalo constante.
c)	Dominio: $\mathbb{R}$, ámbito: $\mathbb{R}$, $f(0)=1$, crece: $]-\infty,-1[$ y $]2,+\infty[$, decrece: $]-1,0[$ y $]1,2[$, constante: $]0,1[$
d)	Dominio: $\mathbb{R}$, ámbito: $[0,+\infty[$, $f(0)=1$, crece: $]-2,-1[$ y $]0,+\infty[$, decrece: $]-\infty,-2[$ y $]-1,0[$.
e)	Dominio: $[-4,+\infty[$, ámbito: $[0,+\infty[$, $f(0)=1$, crece: $]-4,-1[$ y $]0,+\infty[$, decrece: $]-1,0[$
f)	Dominio: $\mathbb{R}$, ámbito: $[0,2[$, $f(0)=0$, crece: $]-\infty,-1[$ y $]0,1[$, decrece: $]-1,0[$ y $]1,+\infty[$.

Ejercicio 9

a) $(f+g)(x)=x+4+x^2+3x-1=x^2+4x+3$

$(f-g)(x)=x+4-(x^2+3x-1)=-x^2-2x+5$

$(f\cdot g)(x)=(x+4)(x^2+3x-1)=x^3+7x^2+11x-4$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x+4}{x^2+3x-1}$ dominio $D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-\left\{\frac{-3-\sqrt{13}}{2},\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right\}$

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x)&=f(x^2+3x-1)\\&=(x^2+3x-1)+4\\&=x^2+3x+3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)&=f(x+4)\\&=(x+4)^2+3(x+4)-1\\&=x^2+11x+27\end{aligned}$$

	Ambas con dominio $\mathbb{R}$
b)	$(f+g)(x)=\dfrac{3x^2+6x-3}{(x-1)(x+2)}$ tiene dominio $\mathbb{R}-\{-2,1\}$, $(f-g)(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+2)}$ tiene dominio $\mathbb{R}-\{-2,1\}$, $(f\cdot g)(x)=\dfrac{2x^2+6x}{x^2+x-2}$ tiene dominio $\mathbb{R}-\{-2,1\}$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{2x(x+2)}{(x-1)(x+3)}$ tiene dominio $\mathbb{R}-\{-3,-2,1\}$, $(f\circ g)(x)=2x+3$ tiene dominio $\mathbb{R}-\{-2\}$, $(g\circ f)(x)=\dfrac{5x-3}{4x-2}$ tiene dominio $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2},1\right\}$.
c)	$(f+g)(x)=9-x^2+\sqrt{x+2}$, se debe analizar cuando $x+2\geq 0$ de donde se tiene que dominio es $D_{f+g}=[-2,+\infty[$, $(f-g)(x)=9-x^2-\sqrt{x+2}$, se debe analizar cuando $x+2\geq 0$ de donde se tiene que dominio es $D_{f-g}=[-2,+\infty[$, $(f\cdot g)(x)=(9-x^2)\sqrt{x+2}$ se debe analizar cuando $x+2\geq 0$ de donde se tiene que dominio es $D_{f\cdot g}=[-2,+\infty[$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{9-x^2}{\sqrt{x+2}}$ se debe analizar cuando $x+2>0$ de donde se tiene que dominio es $D_{\frac{f}{g}}=]-2,+\infty[$, $(f\circ g)(x)=f\left(\sqrt{x+2}\right) =9-\left(\sqrt{x+2}\right)^2 =7-x$ $(g\circ f)(x)=f\left(9-x^2\right) =\sqrt{9-x^2+2} =\sqrt{11-x^2}$

$(f \circ g)(x) = 7 - x$, se debe analizar cuando $x + 2 \geq 0$ de donde se tiene que dominio es $D_{f \circ g} = [-2, +\infty[$,

$(g \circ f)(x) = \sqrt{11 - x^2}$ se debe analizar cuando $11 - x^2 \geq 0$ de donde se tiene que dominio es $D_{g \circ f} = [-\sqrt{11}, \sqrt{11}]$.

Intervalo	$]-\infty, -\sqrt{11}]$	$[-\sqrt{11}, \sqrt{11}]$	$[\sqrt{11}, +\infty[$
$\sqrt{11} + x$	-	+	+
$\sqrt{11} - x$	+	+	-
signo	-	+	-

d) $(f + g)(x) = \dfrac{x^2 - x + 4}{2x}$ tiene dominio $\mathbb{R} - \{0\}$,

$(f - g)(x) = -\dfrac{x^2 - x - 4}{2x}$ tiene dominio $\mathbb{R} - \{0\}$,

$(f \cdot g)(x) = \dfrac{x - 1}{x}$ tiene dominio $\mathbb{R} - \{0\}$,

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{4}{x^2 - x}$ tiene dominio $\mathbb{R} - \{0, 1\}$,

$(f \circ g)(x) = \dfrac{4}{x - 1}$ tiene dominio $\mathbb{R} - \{1\}$,

$(g \circ f)(x) = \dfrac{2 - x}{2x}$ tiene dominio $\mathbb{R} - \{0\}$.

e) $(f+g)(x)=x+4+\frac{2-x^2}{x}=\frac{4x+2}{x}$, se debe analizar cuando se anula el denominador, es decir cuando $x=0$, por lo cual tiene dominio $D_{f+g}=\mathbb{R}-\{0\}$,

$(f-g)(x)=x+4-\frac{2-x^2}{x}=\frac{2x^2+4x-2}{x}$ se debe analizar cuando se anula el denominador, es decir cuando $x=0$, por lo cual se tiene dominio $D_{f-g}=\mathbb{R}-\{0\}$,

$(f\cdot g)(x)=\frac{(x-4)(2-x^2)}{x}$ se debe analizar cuando se anula el denominador, es decir cuando $x=0$, por lo cual se tiene $D_{f\cdot g}=\mathbb{R}-\{0\}$,

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^2+4x}{2-x^2}$ se debe analizar cuando se anula el denominador, es decir cuando $2-x^2=0$, por lo cual se tiene $D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-\{-\sqrt{2},0,\sqrt{2}\}$,

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x)&=f\left(\frac{2-x^2}{x}\right)\\&=\frac{2-x^2}{x}+4\\&=\frac{-x^2+4x+2}{x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)&=f(x+4)\\&=\frac{2-(x+4)^2}{(x+4)}\\&=\frac{-x^2-8x-14}{x+4}\end{aligned}$$

$(f\circ g)(x)=-\frac{x^2-4x-2}{x}$ tiene dominio $\mathbb{R}-\{0\}$,

$(g\circ f)(x)=\frac{-x^2-8x-14}{x+4}$ tiene dominio $\mathbb{R}-\{-4\}$.

f) $(f+g)(x)=\dfrac{x\sqrt{3x}+2}{x}$ tiene dominio $]0,+\infty[$,

$(f-g)(x)=\dfrac{x\sqrt{3x}-2}{x}$ tiene dominio $]0,+\infty[$,

$(f\cdot g)(x)=\dfrac{2\sqrt{3x}}{x}$ tiene dominio $]0,+\infty[$,

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{x\sqrt{3x}}{2}$ tiene dominio $]0,+\infty[$,

$(f\circ g)(x)=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{x}}$ tiene dominio $]0,+\infty[$,

$(g\circ f)(x)=\dfrac{2}{\sqrt{3x}}$ tiene dominio $]0,+\infty[$.

Ejercicio 10

Para poder expresar costo en función de tiempo se requiere calcular :

$$
\begin{aligned}
(C\circ P)(t)&=C(P(t))\\
&=C\left(90t-5t^2\right)\\
&=15000+8000\left(90t-5t^2\right)\\
&=15000+72000t-40000t^2
\end{aligned}
$$

Ejercicio 11

Se debe calcular $F \circ C$

$$
\begin{aligned}
(F \circ C)(K) &= F\left(C(K)\right) \\
&= F(K-273) \\
&= \frac{9(K-273)}{5}+32 \\
&= \frac{9K-2457}{5}+32 \\
&= \frac{9K-2297}{5}
\end{aligned}
$$

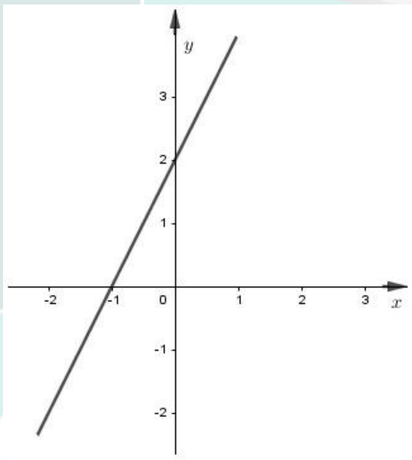
Ejercicios de la sección 5.2

Ejercicio 1

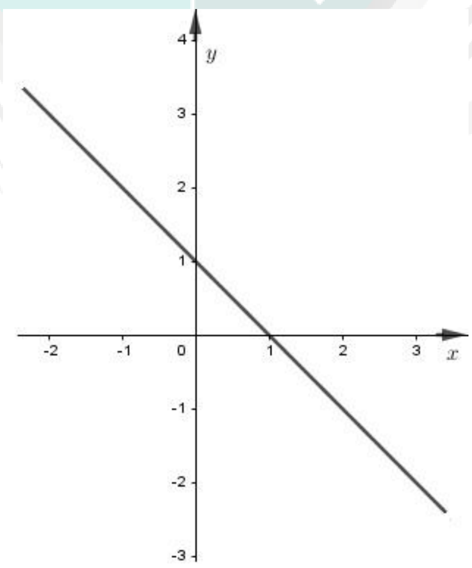
a) Al comparar $y = mx + b$ se tiene que $m = 2 > 0$, por lo cual la función es creciente. Calculo de intersecciones:

$$\begin{aligned} f(0) &= 2 \cdot 0 + 2 \\ &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 0 &= 2x + 2 \\ \Rightarrow -2 &= 2x \\ \Rightarrow -1 &= x \end{aligned}$$

Tomando los dos puntos $(0,2)$ y $(-1,0)$ es posible trazar la gráfica:



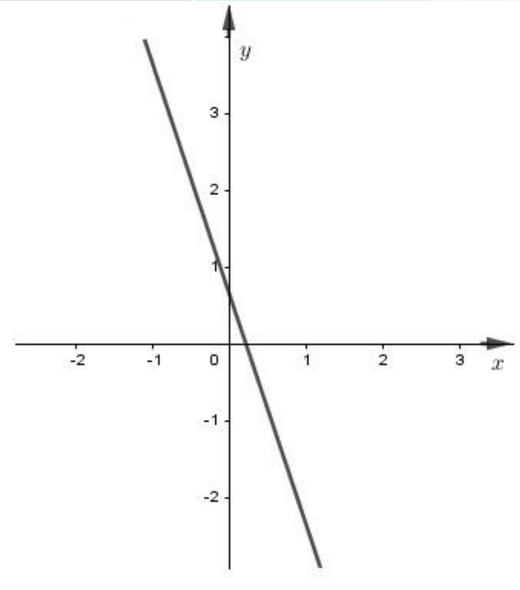
b) Note que f es decreciente, intersecciones $(0,1)$ y $(1,0)$, gráfica:



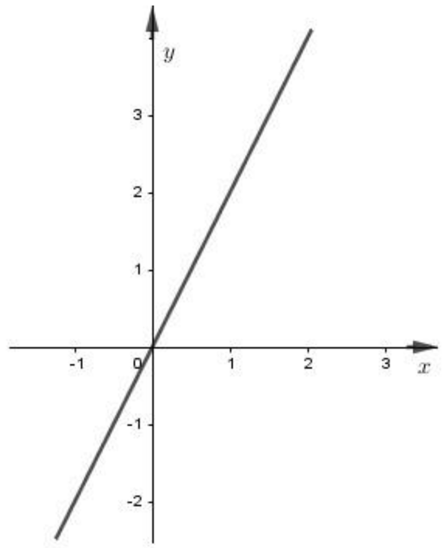
c) Al comparar $y = mx + b$ se tiene que $m = -\frac{9}{3} = -3 < 0$, por lo cual la función es decreciente. Calculo de intersecciones:

$$g(0) = \frac{2 - 9 \cdot 0}{3} = \frac{2}{3} \qquad 0 = \frac{2 - 9x}{3} \Rightarrow 0 = 2 - 9x \Rightarrow 9x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{9}$$

Tomando los dos puntos $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ y $\left(\frac{2}{9}, 0\right)$ es posible trazar la gráfica:



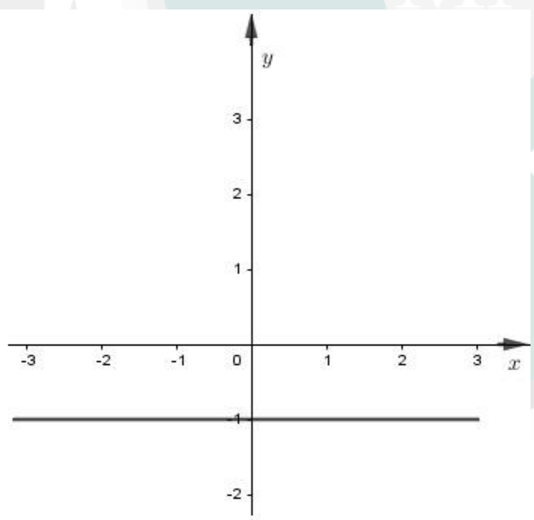
d) Note que f es creciente, intersecciones $(0,0)$, gráfica:



e) Al comparar $y = mx + b$ se tiene que $m = 0$, por lo cual la función es constante.
Calculo de intersecciones:

$$g(0) = -1$$
$$= -1$$

la gráfica es:



Ejercicio 2

a) El salario S como función del número de artículos vendidos está dado por $s(x) = 100000 + 3000x$. El l salario de Alexandra si vendió 18 artículos es $s(18) = 100000 + 3000 \cdot 18 = 154000$

b) $C(x)=100000+6000x$, asisten 36 niños

c) El costo de producir 10 bicicletas al día es de 558000. Se producen 16 bicicletas

Ejercicio 3

a) La pendiente está dada por $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{8-6}{4-2}=1$ y $b=y-mx=6-1\cdot 2=4$ por lo que $f(x)=x+4$.

b) $f(x)=-3x+11$

c) La pendiente está dada por $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{10-3}=0$ y $b=y-mx=\frac{1}{2}-0\cdot 3=\frac{1}{2}$ por lo que $f(x)=\frac{1}{2}$.

d) $f(x)=-x+2$

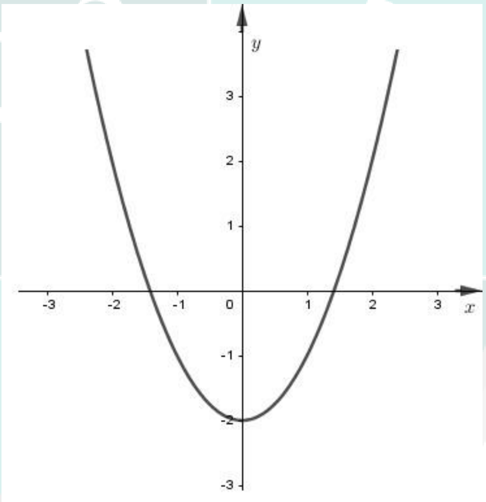
e) La pendiente está dada por $m=-3$ y $b=y-mx=13--3\cdot 0=13$ por lo que $f(x)=-3x+13$.

f) $f(x)=2x-2$

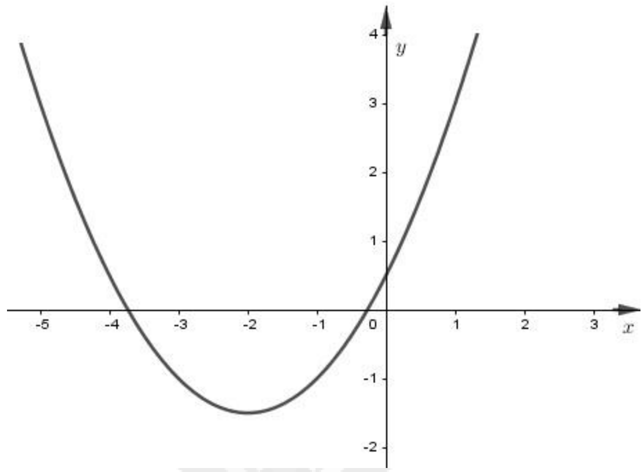
Ejercicios de la sección 5.3

Ejercicio 1

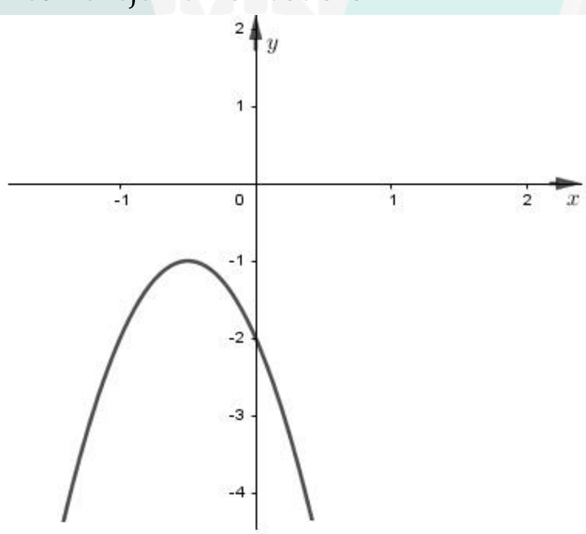
a) Concavidad: como $a=1>0$ entonces la parábola es cóncava hacia arriba, vértice: $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)=\left(\frac{-0}{2\cdot 1}, f\left(\frac{-0}{2\cdot 1}\right)\right)=(0,-2)$, ámbito: $[-2,+\infty[$, crece: $]0,+\infty[$, decrece: $]-\infty,0[$, intersección con eje y: $(0,c)=(0,-2)$, intersección con el eje x: se resuelve $x^2-2=0$ y se obtiene como soluciones $x=\pm\sqrt{2}$, luego los puntos de intersección son $(\sqrt{2},0)$, $(-\sqrt{2},0)$.



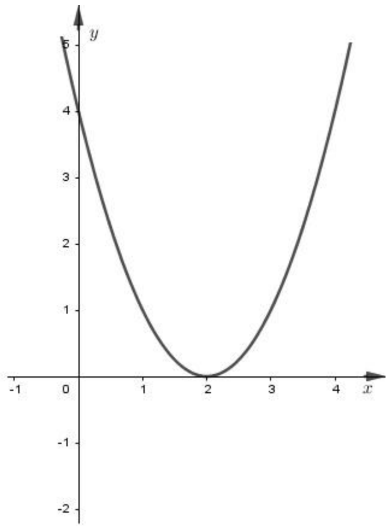
b) Concavidad: hacia arriba, vértice: $\left(-2,-\frac{3}{2}\right)$, ámbito: $\left[-\frac{3}{2},+\infty\right[$, crece: $]-2,+\infty[$, decrece: $]-\infty,-2[$, intersección con los ejes: $(-2+\sqrt{3},0)$, $(-2-\sqrt{3},0)$, $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.



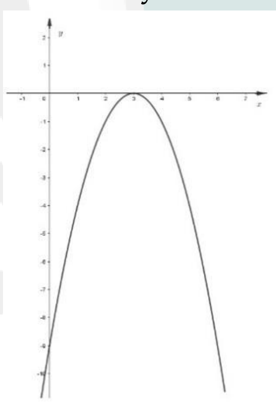
c) Concavidad: como $a=-4<0$ entonces la parábola es cóncava hacia abajo, vértice: $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)=\left(\frac{--4}{2\cdot -4}, f\left(\frac{-1}{2}\right)\right)=\left(-\frac{1}{2},-1\right)$, ámbito: $\left]-\infty,-1\right]$, crece: $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[$, decrece: $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$, intersección con eje y: $(0,c)=(0,-2)$, intersección con el eje x: se resuelve $-4x^2-4x-2=0$ pero su solución es por lo que se concluye que no hay puntos de intersección con el eje de las abscisas.



d) Concavidad: hacia arriba, vértice: $(2,0)$, ámbito: $\left[0,+\infty\right[$, crece: $\left]2,+\infty\right[$, decrece: $\left]-\infty,2\right[$, intersección con los ejes: $(2,0),(0,4)$.



e) Concavidad: como $a = -1 < 0$ entonces la parábola es cóncava hacia abajo, vértice: $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right) = \left(\frac{-6}{2\cdot -1}, f(3)\right) = (3,0)$, ámbito: $]-\infty,0]$, crece: $]-\infty,3[$, decrece: $]3,+\infty[$, intersección con eje y: $(0,c) = (0,-9)$, intersección con el eje x: se resuelve $-x^2 + 6x - 9 = 0$ y se obtiene la solución $x = 3$ por lo que el punto de intersección es $(3,0)$.



f) Concavidad: hacia abajo, vértice: $(-1,3)$, ámbito: $]-\infty,3]$, crece: $]-\infty,-1[$, decrece: $]-1,+\infty[$, intersección con los ejes: $(-\sqrt{3}-1,0)$, $(\sqrt{3}-1,0)$, $(0,2)$.

Ejercicio 2

a) Si $f(x)=a(x-h)^2+k$ entonces $f(x)=a(x-2)^2+2$, para averiguar el valor de a se utiliza que $(0,6)$ pertenece a la gráfica.

$$\begin{aligned} &6=a(0-2)^2+2\\ \Rightarrow\ &6=4a+2\\ \Rightarrow\ &4=4a\\ \Rightarrow\ &1=a \end{aligned}$$

Por lo tanto, el criterio de la función está dado por $f(x)=(x-2)^2+2$

b) $f(x)=-16\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+3$

c) Si $f(x)=a(x-h)^2+k$ entonces $f(x)=a(x+2)^2-\frac{1}{4}$, para averiguar el valor de a se utiliza que $(0,3)$ pertenece a la gráfica.

$$\begin{aligned} &3=a\left(0+\frac{1}{4}\right)^2-2\\ \Rightarrow\ &5=\frac{1}{16}a\\ \Rightarrow\ &80=a \end{aligned}$$

Por lo tanto, el criterio de la función está dado por $f(x)=80\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-2$

d) $f(x)=(x-2)^2$

e) Si $f(x)=a(x-h)^2+k$ entonces $f(x)=a(x+1)^2+4$, para averiguar el valor de a se utiliza que $(0,3)$ pertenece a la gráfica.

$$\begin{aligned} &3=a(0+1)^2+4\\ \Rightarrow\ &-1=a \end{aligned}$$

Por lo tanto, el criterio de la función está dado por $f(x)=-(x+1)^2+4$

Ejercicio 3

a) Se debe calcular el vértice $\left(-\frac{b}{2a}, C\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)=\left(\frac{--120}{2\cdot 1}, C(60)\right)=(60,3200)$. Luego, se deben producir 60 aparatos. El costo mínimo es de 3200 dólares.

b) Se alcanza ingreso máximo con la venta de 140 accesorios. El ingreso máximo es de 4900 dólares.

c) Se debe calcular el vértice $\left(-\frac{b}{2a}, C\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)=\left(\frac{-110}{2\cdot -\frac{1}{6}}, C(330)\right)=(330,18150)$.

Luego, el ingreso se maximiza con la venta de 330 unidades del producto. El ingreso máximo es de 18150 dólares.

d) Dado que el agricultor cercará tres lados del terreno, entonces, si l y a son las dimensiones del terreno, se tiene que $3000=2l+a$, de donde $A(l)=l\cdot(3000-2l)=3000l-2l^2$. Para determinar el área máxima, se calcula el vértice:

$$\left(-\frac{b}{2a}, I\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)=\left(\frac{-3000}{2\cdot -2}, C\left(\frac{-3000}{2\cdot -2}\right)\right)=(750,1125\,000).$$

El agricultor puede cercar un área máxima de 1 125 000 m². Las dimensiones del terreno son 750 m por 1500 m.

e) Sean x y y las dimensiones del terreno, por lo que al tener 3 cercas adicionales paralelas a uno de los lados, entonces $1800=5x+2y$, de donde $\frac{1800-5x}{2}=y$. El área se calcula $A=x\cdot y$, por lo que sustituyendo se obtiene:

$A(x)=x\cdot\left(\frac{1800-5x}{2}\right)=900x-\frac{5}{2}x^2$. Se debe calcular el vértice

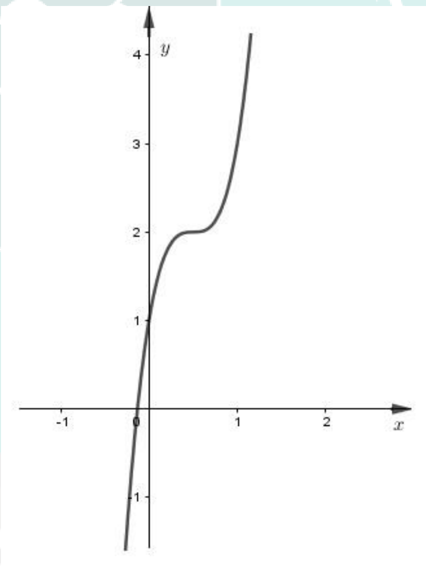
$\left(-\frac{b}{2a}, \mathrm{A}\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)=\left(\frac{-900}{2\cdot -\frac{5}{2}}, \mathrm{A}(180)\right)=(180,81000)$. Luego, se puede encerrar un área máxima de 27000 m^2. Las dimensiones son 180m por 450m.

f) La altura máxima del proyectil es de 1406,25 metros y caerá a una distancia de 3392,77 metros aproximadamente.

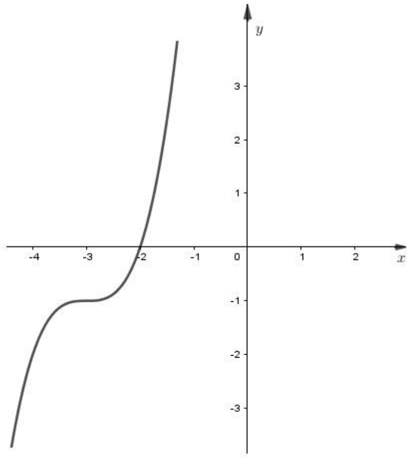
Ejercicios de la sección 5.4

Ejercicio 1

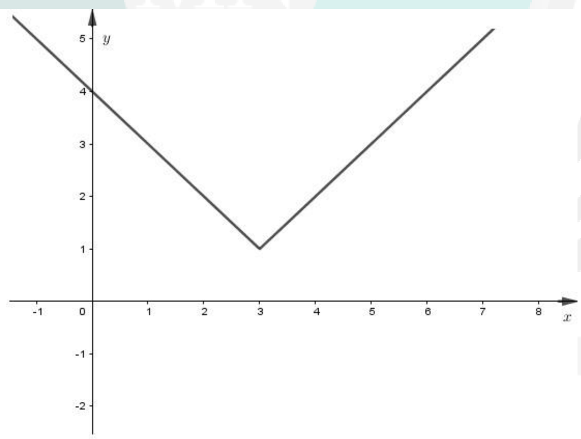
a) La gráfica es una función cúbica que tiene un corrimiento de $\frac{1}{2}$ unidades a la derecha y 2 hacia arriba. Para determinar los puntos de intersección con el eje y se resuelve $f(0)=(2\cdot 0-1)^3+2=1$. Para intersección con el eje x, $0=(2x-1)^3+2$ de donde $x=\frac{-\sqrt[3]{2}+1}{2}$ y se concluye que los puntos de intersección son $(0,1)$ y $\left(\frac{-\sqrt[3]{2}+1}{2},0\right)$.



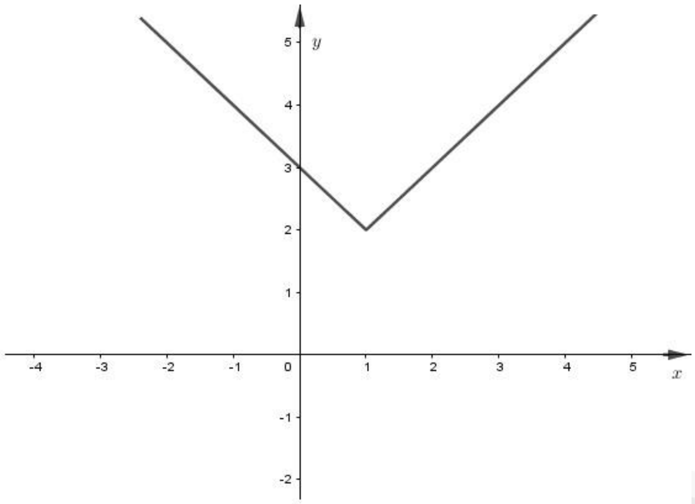
b) Dominio: $\mathbb{R}$; ámbito: $\mathbb{R}$; puntos de intersección: $(-2,0)$ y $(0,26)$; gráfica:



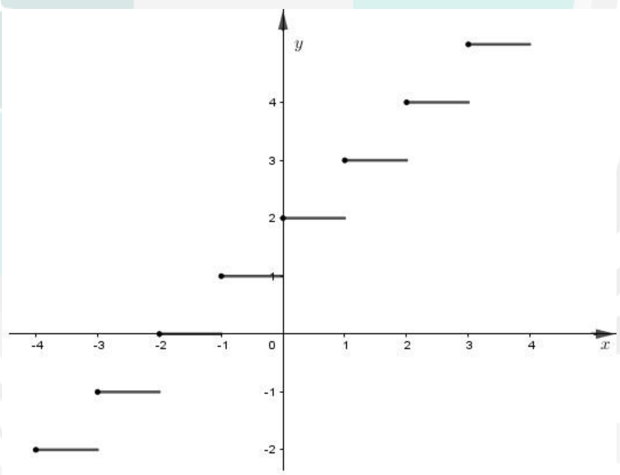
c) La gráfica es una función valor absoluto que tiene un corrimiento de 3 unidades a la derecha y 1 unidad hacia arriba. Para determinar los puntos de intersección con el eje *y* se resuelve $f(0)=|3-0|+1=4$. Para intersección con el eje *x*, se resuelve $0=|3-x|+1$ y se concluye que su solución es vacía, por lo que no interseca el eje *x*. Luego los puntos de intersección son: $(0,4)$



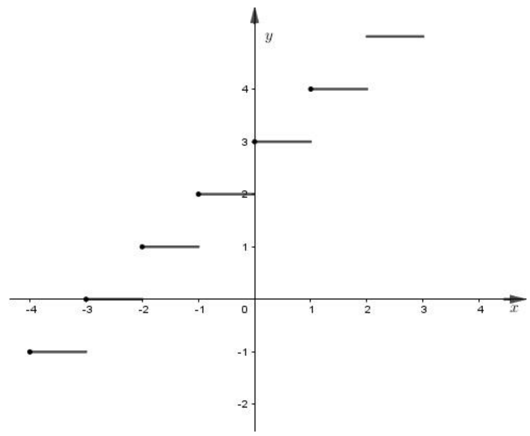
d) Dominio: $\mathbb{R}$; ámbito: $[2,+\infty[$; puntos de intersección: $(0,3)$; gráfica:



e) La gráfica es una función parte entera que tiene un corrimiento de 2 unidades a la izquierda. El punto de intersección con el eje y es $(0,2)$ y con el eje x, $(x,0)$ $x\in[-2,-1[$. Dominio: $\mathbb{R}$; ámbito: $\mathbb{Z}$.



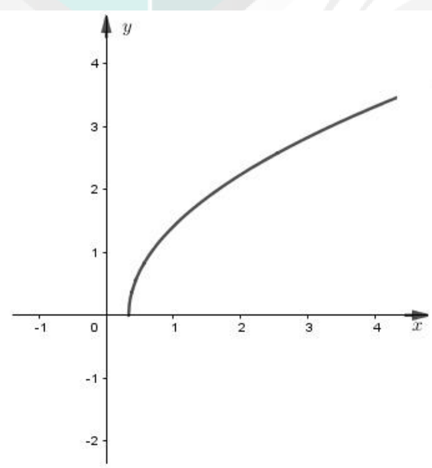
f) Dominio: $\mathbb{R}$; ámbito: $\mathbb{Z}$; puntos de intersección: $(0,3)$ y $(x,0)$, con $x \in [-3,-2[$; gráfica:



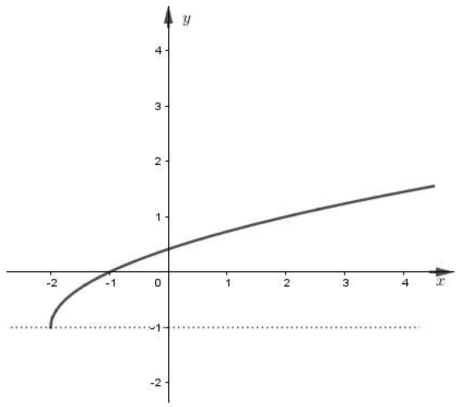
g) La gráfica es una función raíz cuadrada que tiene un corrimiento de $\frac{1}{3}$ unidades a la derecha. Para hallar el punto de intersección con el eje y se calcula $c(0)=\sqrt{3\cdot 0-1}$, pero esta es una expresión indeterminada, por lo que se concluye que no hay intersección con el eje y. Para hallar la intersección con x se resuelve

$$\begin{aligned} &0=\sqrt{3x-1} \\ \Rightarrow\ &0=3x-1 \\ \Rightarrow\ &\frac{1}{3}=x \end{aligned}$$

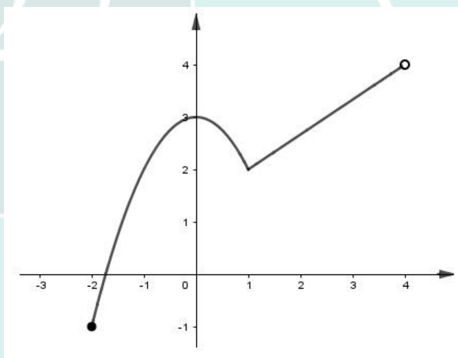
Por lo tanto el punto de intersección es $\left(\frac{1}{3},0\right)$.



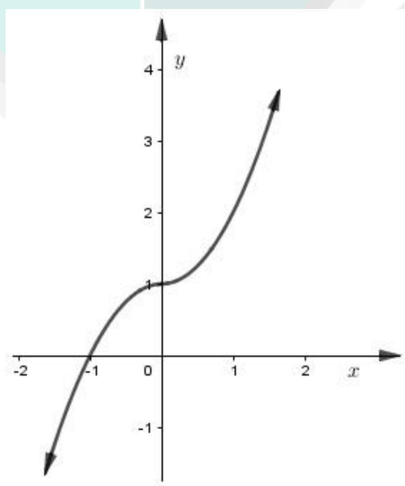
h) Dominio: $[-2,+\infty[$; ámbito: $[-1,+\infty[$; puntos de intersección: $\left(0,\sqrt{2}-1\right)$ y $(-1,0)$; gráfica:



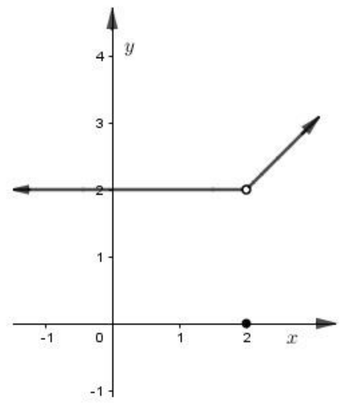
i) Dominio: $[-2,3[$; ámbito: $[-1,4[$; puntos de intersección: $(0,3)$ y $\left(-\sqrt{3},0\right)$; gráfica:



j) Dominio: $\mathbb{R}$; ámbito: $\mathbb{R}$; puntos de intersección: $(0,1)$ y $(1,0)$; gráfica:



k) Dominio: $\mathbb{R}$; ámbito: $\left[2,+\infty\right[\cup\{0\}$; puntos de intersección: $(0,2)$ y $(0,0)$; gráfica:



Ejercicio 2

a) Se analiza cuando el denominador es nulo, esto es $x(x+3)=0$ y se tiene que dominio: $\mathbb{R}-\{-3,0\}$, para hallar la intersección con el eje x se calcula $0=\dfrac{x+2}{x(x+3)}$ de donde $x=-2$ y se concluye que el punto de intersección es $(-2,0)$. Como la expresión está en su forma simplificada, se tiene que las asíntotas verticales son: $x=0$ y $x=-3$. Como el grado del polinomio del denominador es mayor que el del numerador la asíntota horizontal es: $y=0$.

b) Dominio: $\mathbb{R}-\{-2\}$, intersecciones: $(-3,0)$ y $(0,3)$, asíntotas verticales: no posee, horizontales: no posee.

c) Se analiza cuando el denominador es nulo, es decir cuando $x=0$ y se tiene que dominio: $\mathbb{R}-\{0\}$, para hallar la intersección con el eje x se calcula $0=x+\dfrac{9}{x}$ de donde se concluye que no hay puntos de intersección con x. La expresión escrita en su forma simplificada es $h(x)=\dfrac{x^2+9}{x}=\dfrac{(x+3)(x-3)}{x}$, se tiene que la asíntota vertical es: $x=0$. Como el grado del polinomio del denominador es menor que el del numerador se concluye que no posee asíntota horizontal.

d) Dominio: $\mathbb{R}-\{0,-2\}$, intersecciones: $(-3,0)$ y $(0,3)$, asíntotas verticales: no posee, horizontales: no posee.

e) Se analiza cuando el denominador es nulo, es decir cuando $x^2-1=0$ y se tiene que $x=\pm -1$ por lo que dominio: $\mathbb{R}-\{-1,1\}$, para hallar la intersección con el eje x se calcula $0=\frac{10}{x^2-1}$ que no posee solución y por lo tanto la gráfica de la función no interseca al eje x. La expresión escrita en su forma simplificada es $h(x)=\frac{10}{x^2-1}=\frac{10}{(x-1)(x+1)}$, se tiene que las asíntotas verticales son: $x=-1$ y $x=1$. Como el grado del polinomio del denominador es mayor que el del numerador se concluye que la asíntota horizontal es $y=0$.

f) Dominio: $\mathbb{R}-\{-2,2\}$, intersecciones: $(0,0)$, asíntotas verticales: $x=-2$ y $x=0$, horizontales: $y=0$.

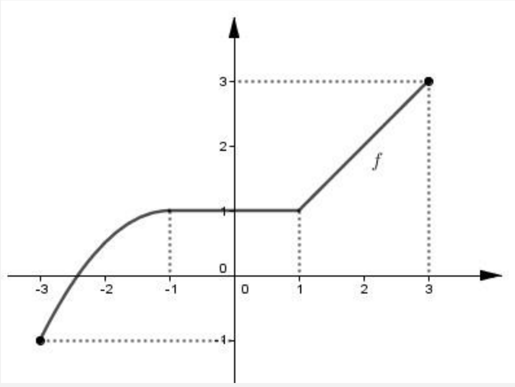
g) Se analiza cuando el denominador es nulo, es decir cuando $2x^2+2x-24=0$ y se tiene que $x=-4$ y $x=3$ por lo que el dominio es: $\mathbb{R}-\{-4,3\}$, para hallar la intersección con el eje x se calcula $0=\frac{6x^2-6x}{2x^2+2x-24}$ de donde $x=0$ y $x=1$ y por lo tanto la gráfica de la función interseca al eje x en $(0,0)$ y $(1,0)$. La expresión escrita en su forma simplificada es $h(x)=\frac{6x^2-6x}{2x^2+2x-24}=\frac{6x(x-1)}{(x+4)(x-3)}$, se tiene que las asíntotas verticales son: $x=-4$ y $x=3$. Como el grado del polinomio del denominador es igual que el del numerador se concluye que la asíntota horizontal es $y=3$.

h) Dominio: $\mathbb{R}-\{0\}$, intersecciones: no posee, asíntotas verticales: $x=0$, horizontales: no posee.

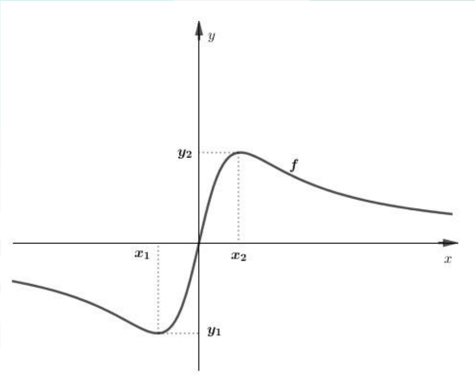
Ejercicios de la sección 5.5

Ejercicio 1

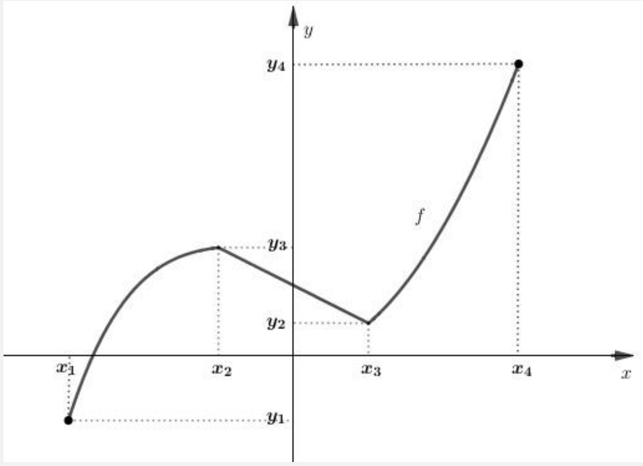
a) $f:[-3,3]\rightarrow[-1,3]$.No es inyectiva porque para toda $x\in\,]-1,1[$ la imagen es 1, sí es sobreyectiva porque ámbito y codominio son iguales, no es biyectiva



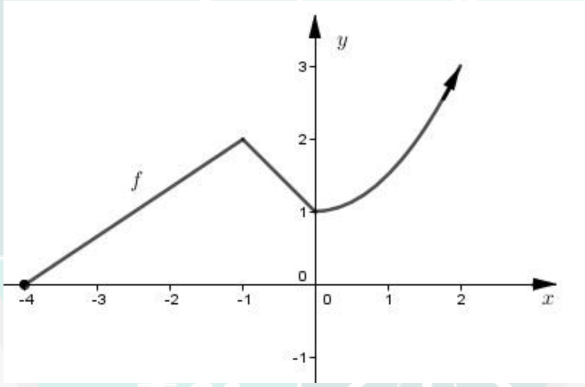
b) $f:\mathbb{R}\rightarrow[y_1,y_2]$. No es inyectiva, sí es sobreyectiva, no es biyectiva.



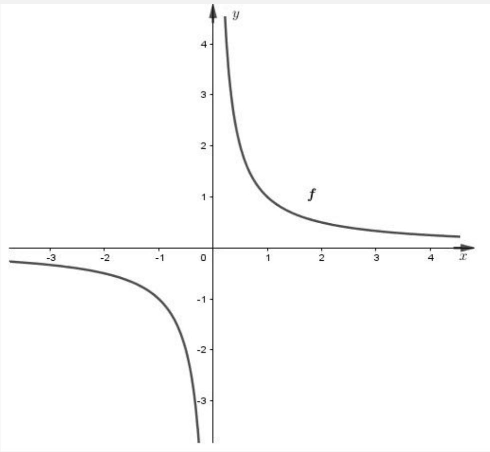
c) $f:[x_1,x_4]\rightarrow\mathbb{R}$. No es inyectiva porque existen valores del dominio que poseen la misma imagen, no es sobreyectiva, no es biyectiva.



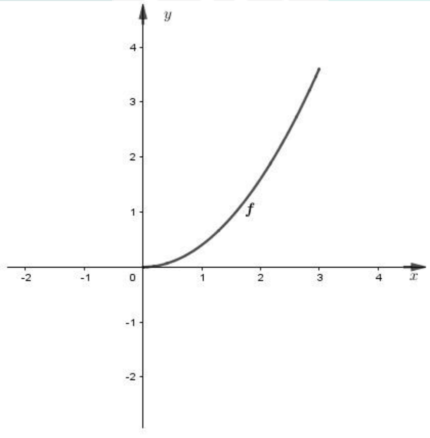
d) $f:[-4,+\infty[\rightarrow[0,+\infty[$. No es inyectiva, sí es sobreyectiva, no es biyectiva.



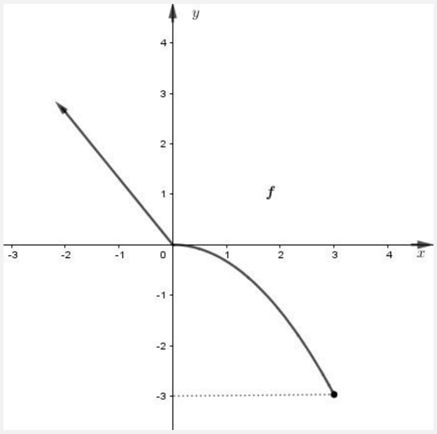
e) $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$. Sí es inyectiva porque para cada valor y del rango existe un único elemento x asociado en el dominio, sí es sobreyectiva porque ámbito y codominio son iguales, sí es biyectiva.



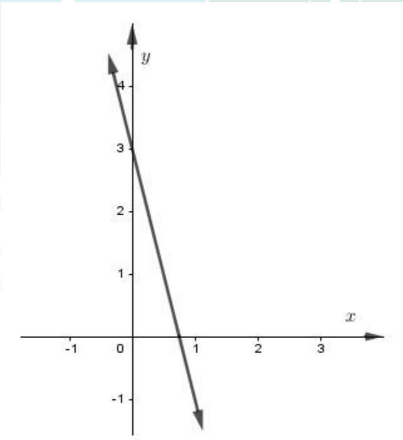
f) Sí es inyectiva, sí es sobreyectiva, sí es biyectiva



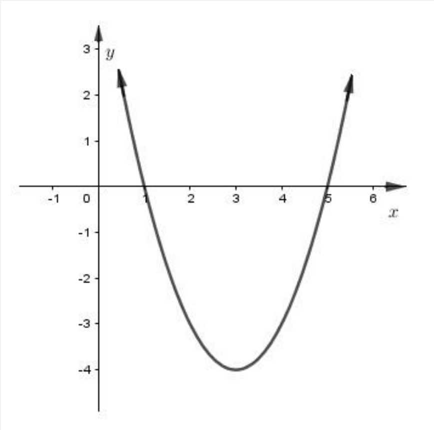
g) $f:]-\infty,3] \to [-3,+\infty[$. Sí es inyectiva, sí es sobreyectiva, sí es biyectiva.



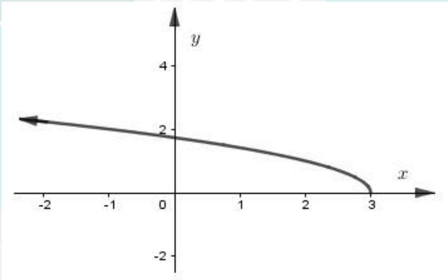
h) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=-4x+3$. Sí es inyectiva porque no existen valores del dominio que poseen la misma imagen, si es sobreyectiva porque ámbito y codominio son el mismo, sí es biyectiva.



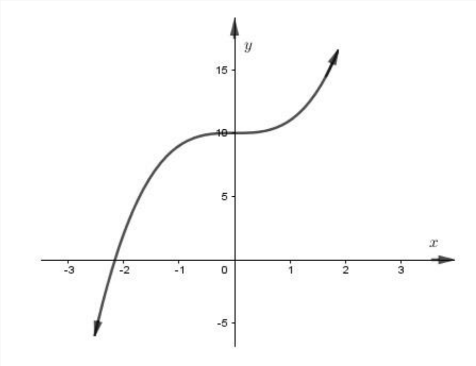
i) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $h(x)=(x-3)^2-4$. No es inyectiva. No es sobreyectiva. No es biyectiva .



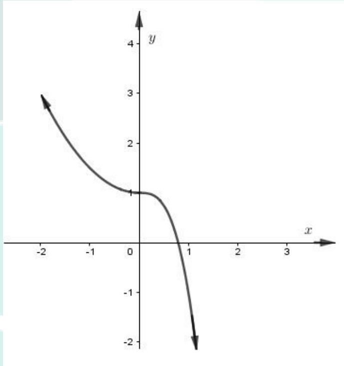
j) $f:]-\infty,3]\to[0,+\infty[$ tal que $f(x)=\sqrt{3-x}$. Sí es inyectiva porque no existen valores del dominio que posean la misma imagen, si es sobreyectiva porque ámbito y codominio son el mismo, sí es biyectiva.



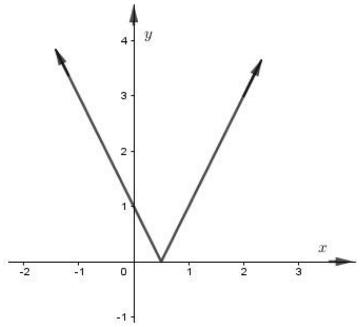
k) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=x^3+10$. Sí es inyectiva porque no existen valores del dominio que posean la misma imagen, si es sobreyectiva porque ámbito y codominio son el mismo, sí es biyectiva.



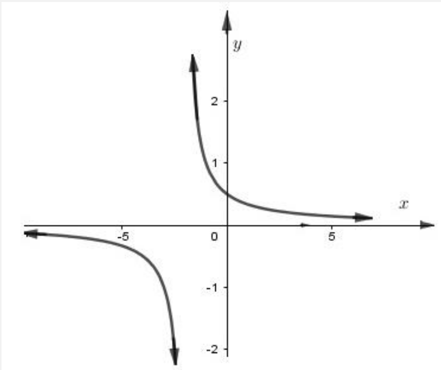
l) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=\begin{cases}0,5x^2+1 & \text{si } \; 0>x\\ 2x^3+1 & \text{si } \; 0\le x\end{cases}$. Sí es inyectiva. Sí es sobreyectiva. Sí es biyectiva.



m) No es inyectiva porque existen valores del dominio que poseen la misma imagen, no es sobreyectiva porque ámbito y codominio no son iguales, no es biyectiva.



n) $f:\mathbb{R}-\{-2\}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+4x+4}$. Sí es inyectiva. No es sobreyectiva. No es biyectiva.



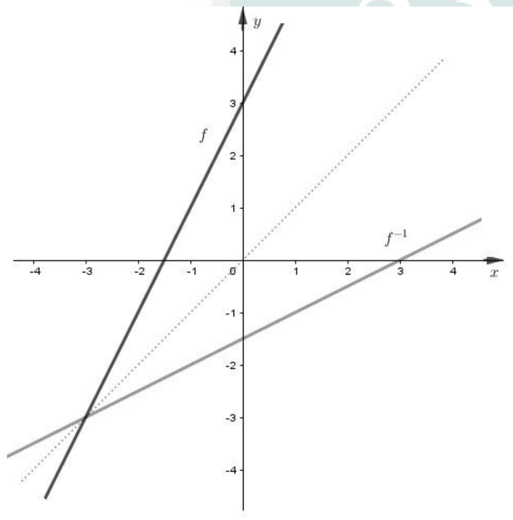
Ejercicios de la sección 5.6

Ejercicio 1

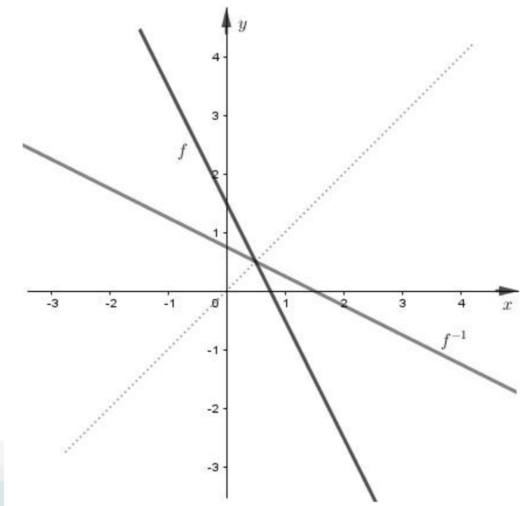
a) Si se despeja x de $y=2x+3$ se tiene que $x=\dfrac{y-3}{2}$, por lo que $f^{-1}(x)=\dfrac{x-3}{2}$.

$$\begin{aligned}\left(f\circ f^{-1}\right)(x)&=f\left(\frac{x-3}{2}\right)\\&=2\left(\frac{x-3}{2}\right)+3\\&=x\end{aligned}\qquad\qquad \begin{aligned}\left(f^{-1}\circ f\right)(x)&=f\left(2x+3\right)\\&=\left(\frac{2x+3-3}{2}\right)\\&=x\end{aligned}$$

Gráfica



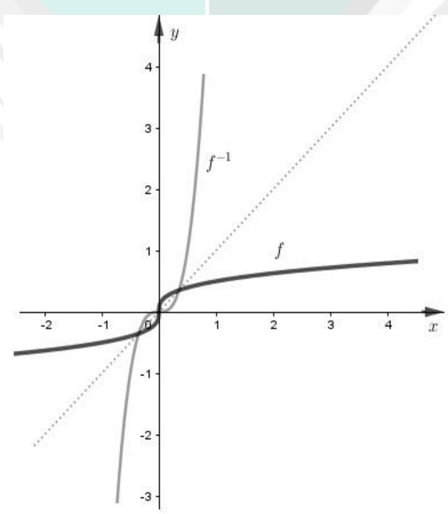
b) $g^{-1}(x)=\dfrac{3-2x}{4}$



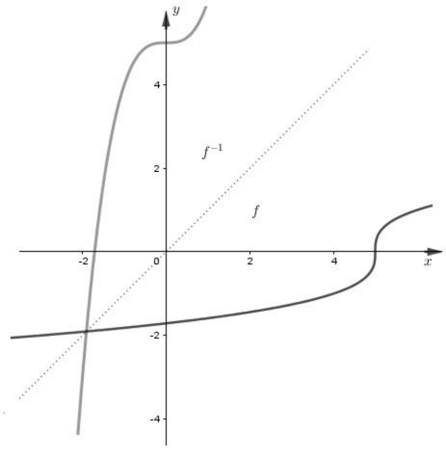
c) Si se despeja x de $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{2}$ se tiene que $x=8y^3$, por lo que $h^{-1}(x)=8x^3$.

$$\begin{aligned}\left(f\circ f^{-1}\right)(x)&=f\left(8x^3\right)\\&=\frac{\sqrt[3]{8x^3}}{2}\\&=x\end{aligned}\qquad\qquad \begin{aligned}\left(f^{-1}\circ f\right)(x)&=f\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2}\right)\\&=8\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2}\right)^3\\&=x\end{aligned}$$

Gráfica:



d) $f^{-1}(x) = x^3 + 5$

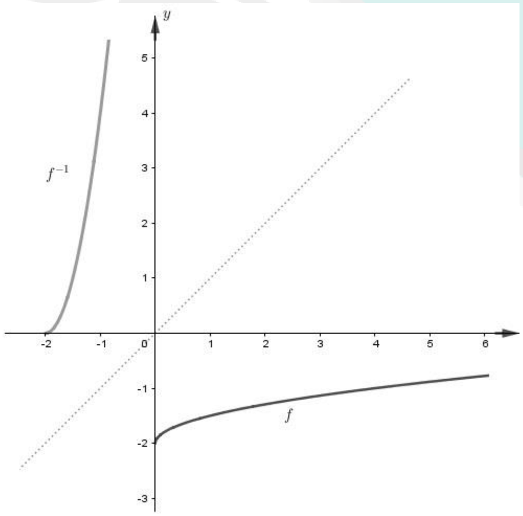


e) Si se despeja x de $y = \dfrac{\sqrt{x}-4}{2}$ se tiene que $x = (2y+4)^2$, por lo que $h^{-1}(x) = (2x+4)^2$.

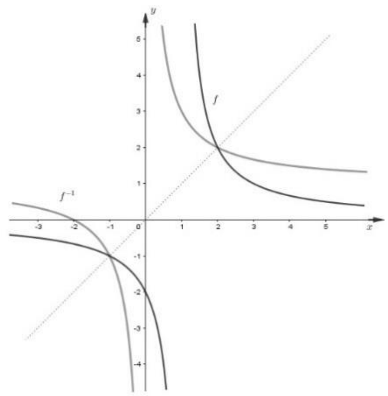
$$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left((2x+4)^2\right) = \frac{\sqrt{(2x+4)^2}-4}{2} = x$$

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f\left(\frac{\sqrt{x}-4}{2}\right) = \left(2\left(\frac{\sqrt{x}-4}{2}\right)+4\right)^2 = x$$

Gráfica:



f) $g^{-1}(x)=\dfrac{2}{x-1}$

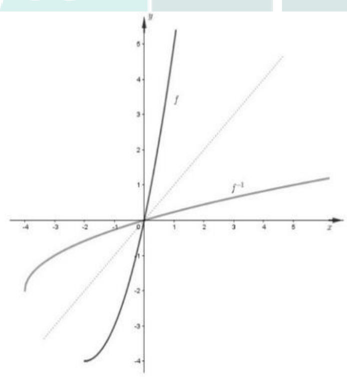


g) Si se despeja x de $y=x^2+4x$ se tiene que $x=\sqrt{y+4}-2$, por lo que $g^{-1}(x)=\sqrt{x+4}-2$.

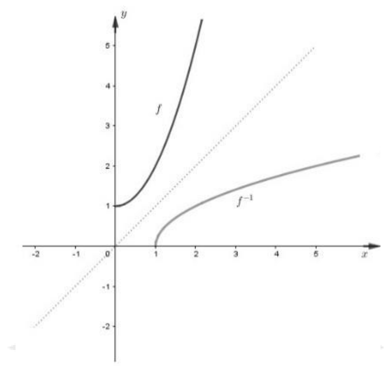
$$\begin{aligned}\left(f\circ f^{-1}\right)(x)&=f\left(\sqrt{x+4}-2\right)\\&=\left(\sqrt{x+4}-2\right)^2+4\left(\sqrt{x+4}-2\right)\\&=x+4-4\sqrt{x+4}+4+4\sqrt{x+4}-8\\&=x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}\circ f\right)(x)&=f\left(x^2+4x\right)\\&=\sqrt{x^2+4x+4}-2\\&=\sqrt{(x+2)^2}-2\\&=x\end{aligned}$$

Gráfica



h) $h^{-1}(x)=\sqrt{x-1}$



i) Criterio de la función inversa : $h^{-1}(x)=-3+\sqrt{x+9}$, pues al despejar

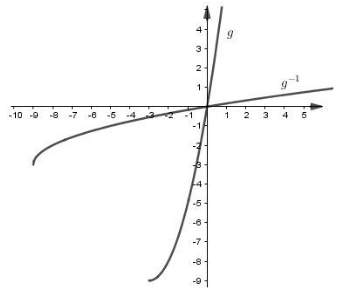
$$\begin{aligned}
&y=x^2+6x\\
&\Rightarrow y=x^2+6x+9-9\\
&\Rightarrow y=(x+3)^2-3^2\\
&\Rightarrow y-9=(x+3)^2\\
&\Rightarrow \sqrt{y-9}=x+3\\
&\Rightarrow \sqrt{y-9}-3=x
\end{aligned}$$

Dominio de $h^{-1}(x):[-9,+\infty[$; codominio de $h^{-1}(x):[-3,+\infty[$. Comprobación de que $(h\circ h^{-1})(x)=(h^{-1}\circ h)(x)=x$:

$$\begin{aligned}
(h\circ h^{-1})(x)&=h\left(-3+\sqrt{x+9}\right)\\
&=\left(-3+\sqrt{x+9}\right)^2+6\left(-3+\sqrt{x+9}\right)\\
&=x+9-6\sqrt{x+9}+9-18+6\sqrt{x+9}\\
&=x.
\end{aligned}$$

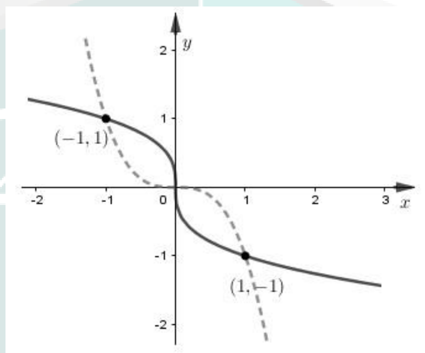
$$\begin{aligned}
(h^{-1}\circ h)(x)&=h^{-1}\left(x^2+6x\right)\\
&=\sqrt{x^2+6x+9}-3\\
&=\sqrt{(x+3)^2}-3\\
&=x.
\end{aligned}$$

Gráficas:

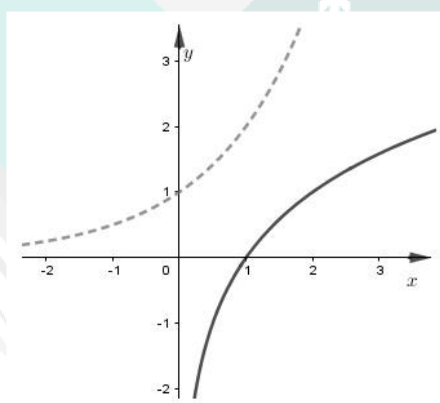


Ejercicio 2

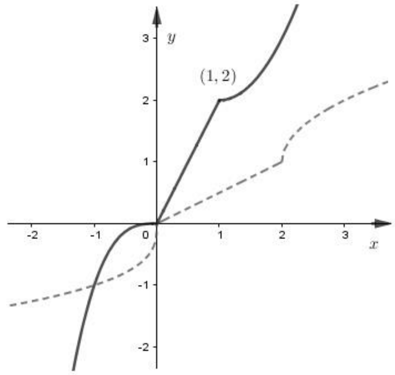
a) $f(x) = -\sqrt[3]{x}$



b) $g(x) = \log_2(x)$



c) $f(x) = \begin{cases} x^3, \text{ si } x < 0 \\ 2x, \text{ si } 0 \le x < 1 \\ (x-1)^2 + 2, \text{ si } x \ge 1 \end{cases}$



Ejercicio 3

Cálculo de $f^{-1}(x)$:

$$y=\frac{x+2}{3-x}\Rightarrow y(3-x)=x+2\Rightarrow 3y-xy=x+2\Rightarrow 3y-2=x(y+1)\Rightarrow x=\frac{3y-2}{y+1},$$

de donde $f^{-1}(x)=\dfrac{3x-2}{x+1}$.

a) $f^{-1}(-2)=\dfrac{3(-2)-2}{-2+1}=\dfrac{-8}{-1}=8$

b) $f^{-1}(4)=2$

c) $f^{-1}(0)=\dfrac{3(0)-2}{0+1}=\dfrac{-2}{1}=-2$

d) $f^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{1}{3}$

Ejercicios de Autoevaluación

1. Considere las siguientes funciones. Determine el criterio y dominio de $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$ y $f\circ g$.

   a) $f(x)=3x^2+4x$ y $g(x)=1+\frac{1}{x}$.

$$(f+g)(x)=3x^2+4x+1+\frac{1}{x}=\frac{3x^3+4x^2+x+1}{x}$$ y su dominio es $D_{f+g}=\mathbb{R}-\{0\}$

$$(f-g)(x)=3x^2+4x-\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{3x^3+4x^2-x-1}{x}$$ y su dominio es $D_{f-g}=\mathbb{R}-\{0\}$

$$\begin{aligned}(f\cdot g)(x)&=\left(3x^2+4x\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)\\&=\left(3x^2+4x\right)\left(\frac{x+1}{x}\right)\\&=\frac{3x^3+7x^2+4x}{x}\end{aligned}$$ y su dominio es $D_{f\cdot g}=\mathbb{R}-\{0\}$

$$\begin{aligned}&=\frac{x\left(3x^2+7x+4\right)}{x}\\&=3x^2+7x+4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)(x)&=\frac{3x^2+4x}{1+\frac{1}{x}}\\&=\frac{x(3x+4)}{\frac{x+1}{x}}\end{aligned}$$ y su dominio es $D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-\{-1,0\}$

$$=\frac{x^2(3x+4)}{x+1}$$

$$
\begin{aligned}
(f\circ g)(x) &= f\left(1+\frac{1}{x}\right)\\
&= f\left(\frac{x+1}{x}\right)\\
&= 3\left(\frac{x+1}{x}\right)^2+4\left(\frac{x+1}{x}\right)\\
&= \frac{3x^2+6x+3+4x+4}{x}\\
&= \frac{3x^2+10x+7}{x}
\end{aligned}
$$

Para determinar el dominio de $f\circ g$, primero se debe excluir 0 porque en la función g que se evalúa ese valor no está incluido en su dominio, luego f posee dominio $\mathbb{R}$ y por ello se concluye que $D_{f\circ g}=\mathbb{R}-\{0\}$.

b) $f(x)=\sqrt{x+1}$ y $g(x)=x^2+3$

$(f+g)(x)=\sqrt{x+1}+x^2+3$ y su dominio es $D_{f+g}=[-1,+\infty[$.

$(f-g)(x)=\sqrt{x+1}-x^2-3$ y su dominio es $D_{f-g}=[-1,+\infty[$.

$(f\cdot g)(x)=\sqrt{x+1}\left(x^2+3\right)$ y su dominio es $D_{f\cdot g}=[-1,+\infty[$.

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x^2+3}$ y su dominio es $D_{\frac{f}{g}}=[-1,+\infty[$.

$(f\circ g)(x)=\sqrt{x^2+4}$ y su dominio es $D_{f\circ g}=\mathbb{R}$.

c) $f(x)=10x^2$ y $g(x)=\sqrt{x^2-7}$.

Note que el dominio de g es $D_f = \left]-\infty,-\sqrt{7}\right] \cup \left[\sqrt{7},+\infty\right[$, puesto que

$g(x)=\sqrt{x^2-7}=\sqrt{\left(x-\sqrt{7}\right)\left(x+\sqrt{7}\right)}$.

$-\infty$	$-\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$	$+\infty$
$x+\sqrt{7}$	$-$	$+$	$+$
$x-\sqrt{7}$	$-$	$-$	$+$
signo	$+$	$-$	$+$

$(f+g)(x)=10x^2+\sqrt{x^2-7}$ y su dominio es $D_{f+g} = \left]-\infty,-\sqrt{7}\right] \cup \left[\sqrt{7},+\infty\right[$.

$(f+g)(x)=10x^2-\sqrt{x^2-7}$ y su dominio es $D_{f-g} = \left]-\infty,-\sqrt{7}\right] \cup \left[\sqrt{7},+\infty\right[$.

$(f\cdot g)(x)=10x^2\sqrt{x^2-7}$ y su dominio es $D_{f\cdot g} = \left]-\infty,-\sqrt{7}\right] \cup \left[\sqrt{7},+\infty\right[$.

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{10x^2}{\sqrt{x^2-7}}$ y su dominio es $D_{\frac{f}{g}} = \left]-\infty,-\sqrt{7}\right[\cup \left]\sqrt{7},+\infty\right[$.

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x)&=f(g(x))\\ &=f\left(\sqrt{x^2-7}\right)\\ &=10\left(\sqrt{x^2-7}\right)^2\\ &=10x^2-70\end{aligned}$$

y su dominio es $D_{f\circ g} = \left]-\infty,-\sqrt{7}\right] \cup \left[\sqrt{7},+\infty\right[$.

Para determinar el dominio de $f\circ g$, primero se deben los valores que no están en el dominio de *g*, luego *f* posee dominio $\mathbb{R}$, se concluye que

$D_{f\circ g} = \left]-\infty,-\sqrt{7}\right] \cup \left[\sqrt{7},+\infty\right[$.

d) $f(x)=\dfrac{x+2}{3x-1}$ y $g(x)=\dfrac{x}{x-1}$

$(f+g)(x)=\dfrac{12x^2-6}{3(3x-1)(x-1)}$ y su dominio es $D_{f+g}=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{3},1\right\}$.

$(f-g)(x)=\dfrac{-6x^2+6x-6}{3(3x-1)(x-1)}$ y su dominio es $D_{f-g}=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{3},1\right\}$.

$(f\cdot g)(x)=\dfrac{x(x+2)}{(x-1)(3x-1)}$ y su dominio es $D_{f\cdot g}=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{3},1\right\}$.

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x(3x-1)}$ y su dominio es $D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-\left\{0,\dfrac{1}{3},1\right\}$.

$(f\circ g)(x)=\dfrac{3x-2}{2x+1}$ y su dominio es $D_{f\circ g}=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2},1\right\}$.

e) $f(x)=\dfrac{x+4}{3x}$ y $g(x)=x+5$.

$(f+g)(x)=\dfrac{x+4}{3x}+x+5=\dfrac{x+4+3x^2+15x}{3x}=\dfrac{3x^2+16x+4}{3x}$ y su dominio es

$D_{f+g}=\mathbb{R}-\{0\}$

$(f-g)(x)=\dfrac{x+4}{3x}-(x+5)=\dfrac{x+4-3x^2-15x}{3x}=\dfrac{-3x^2-14x+4}{3x}$ y su dominio es

$D_{f-g}=\mathbb{R}-\{0\}$

$$\begin{aligned}(f\cdot g)(x) &= \frac{x+4}{3x}(x+5)\\ &= \frac{x^2+5x+4x+20}{3x} \quad \text{y su dominio es } D_{f+g}=\mathbb{R}-\{0\}\\ &= \frac{x^2+9x+20}{3x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{\frac{x+4}{3x}}{x+5} \qquad \text{y su dominio es } D_{f+g}=\mathbb{R}-\{-5,0\}\\ &= \frac{x+4}{3x(x+5)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x) &= f(x+5)\\ &= \frac{x+5+4}{3(x+5)}\\ &= \frac{x+9}{3(x+5)}\end{aligned}$$

Para determinar el dominio de $f\circ g$, primero se analiza el dominio de *g*, que en este caso es $\mathbb{R}$, luego *f* posee dominio $\mathbb{R}-\{0\}$ por lo que se debe cumplir que $x+5\neq 0$ y por ello se concluye que $D_{f\circ g}=\mathbb{R}-\{-5\}$.

Ejercicio 2

a) $f(x)=\dfrac{x^2+5}{2x^2}$,

$$\begin{aligned}
y=\frac{x^2+5}{2x^2} &\Rightarrow 2x^2y=x^2+5\\
&\Rightarrow 2x^2y-x^2=5\\
&\Rightarrow x^2(2y-1)=5\\
&\Rightarrow x^2=\frac{5}{2y-1}\\
&\Rightarrow x=\sqrt{\frac{5}{2y-1}}\\
&\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{\frac{5}{2x-1}}
\end{aligned}$$

Ahora, $f:\left]0,+\infty\right[\to\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ y $f^{-1}:\left]\frac{1}{2},+\infty\right[\to\left]0,+\infty\right[$

b) $f(x)=\dfrac{2}{3-x}$

$f^{-1}(x)=\dfrac{3x-2}{x}$, $f:\mathbb{R}-\{3\}\to\mathbb{R}-\{0\}$ y $f^{-1}:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}-\{3\}$

c) $f(x)=\sqrt{x^2+10x}$, $x>0$.

$$\begin{aligned}
y=\sqrt{x^2+10x} &\Rightarrow y^2=x^2+10x\\
&\Rightarrow y^2=x^2+10x+25-25\\
&\Rightarrow y^2+25=(x+5)^2\\
&\Rightarrow \pm\sqrt{y^2+25}=x+5\\
&\Rightarrow \pm\sqrt{y^2+25}-5=x\\
&\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x^2+25}-5
\end{aligned}$$

Note que se toma $f^{-1}(x)=\sqrt{x^2+25}-5$ debido a que $x>0$. Luego, el dominio de f son los valores que están en cumplen $x^2+10x\geq 0$ de donde

intervalo	$]-\infty,-10]$	$[-10,0]$	$[0,+\infty[$
x	-	-	+
$x+10$	-	+	+
signo	+	-	+

El dominio de f son los valores que están en $[0,+\infty[$, y evaluando estos valores en f se tiene que el ámbito es $[0,+\infty[$ por lo cual $f:[0,+\infty[\to[0,+\infty[$ y $f^{-1}:[0,+\infty[\to[0,+\infty[$.

d) $f(x)=\sqrt[3]{x+8}$

$f^{-1}(x)=x^3-8$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $f^{-1}:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}-\{3\}$

Ejercicio 3

Sean x y y las dimensiones del terreno, entonces, $1800 = 3x + 2y$. El área está dada por $A = xy$. Si se despeja x de la primera ecuación se obtiene $\frac{1800-3x}{2} = y$ que al sustituirla en A se obtiene

$$A(x) = x\left(\frac{1800-3x}{2}\right) = 900x - \frac{3}{2}x^2$$

El vértice está dado por $\left(-\frac{b}{2a}, A\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) = \left(\frac{-900}{2\cdot\frac{-3}{2}}, \mathrm{A}(300)\right) = (300{,}135000)$,

Con lo cual se puede interpretar que el área más grande que puede encerrar es 135000 m^2 y las dimensiones del terreno cercado son 300x450 m.

Fuentes consultadas

Ávila, J. (2003). *Álgebra y Trigonometría*. Cartago: Editorial Tecnológica.

Barrantes, H. (2005). *Introducción a la Matemática*. San José, Costa Rica: EUNED.

Barrantes, H. (2010). *Matemática Básica para Administración*. San José, Costa Rica: EUNED.

Chacel, R. (s. f.). George Polya. Estrategias para la resolución de problemas. Recuperado de http://ficus.pntic.mec.es/fheb0005/Hojas_varias/Material_de_apoyo/-Estrategias%20de%20Polya.pdf

Goodman, A. y Hirsch, L. (1996). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México: Prentice Hall.

Larson, R. y Hostetler, R. (2010). *Precálculo* (7.ª ed.). México, D. F.: Editorial Reverté S. A.

Ministerio de Hacienda (2017). Impuesto sobre la renta (régimen tradicional). Recuperado de http://www.hacienda.go.cr/contenido/12994-regimen-tradicional

Murillo, M., Soto, A. y Araya, J. (2003). *Matemática básica con aplicaciones*. San José, Costa Rica: EUNED.

Paul, R. y Haeussler, E. (2003). *Matemáticas para administración y economía* (10.ª ed.). México: Pearson.

Ruiz, A. (2003). *Historia y Filosofía de las matemáticas*. San José, Costa Rica: EUNED.

Sullivan, M. (2013). *Álgebra y Trigonometría* (9.ª ed.). México, D. F.: Pearson.

Zill, D. y Wright, W. (2011). *Cálculo. Trascendentes tempranas* (4.ª ed.). México, D. F.: McGraw-Hill.