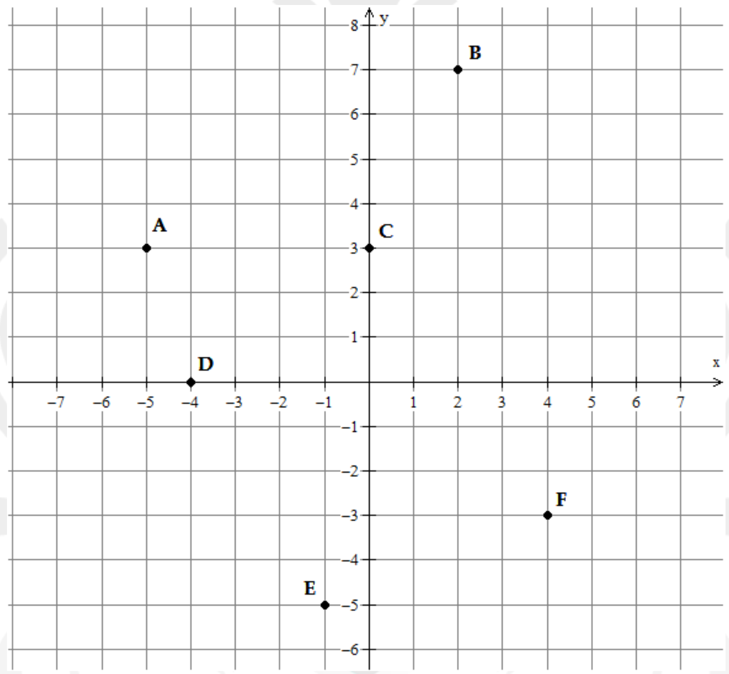
Ejercicios de la sección 4.1

Ejercicio 1

$A(-7,4),\ B(1,6),\ C(0,5),\ D(-3,0),\ E(-2,-4),\ F(3,-1).$

Ejercicio 2

$A(-5,3),\ B(2,7),\ C(0,3),\ D(-4,0),\ E(-1,-5),\ F(4,-3).$



Ejercicio 3

a) I cuadrante

b) IV cuadrante

c) II cuadrante

d) III cuadrante

e) II cuadrante

f) I cuadrante

g) III cuadrante

h) IV cuadrante

Ejercicio 4

a) 5

b) $\sqrt{13}$

c) $\sqrt{58}$

d) $\frac{13}{6}$

e) $2\sqrt{2}$

f) $2\sqrt{37}$

g) 10

h) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$

i) $\sqrt{7}$

j) $5\sqrt{2}$

k) $14\sqrt{2}$

l) $\sqrt{41}$

m) $\sqrt{6}$

n) $\sqrt{34}$

o) $\frac{7\sqrt{10}}{3}$

Ejercicio 5

a) $\left(\frac{9}{2},\frac{13}{2}\right)$

b) $\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$

c) $(0,0)$

d) $\left(5,\frac{1}{2}\right)$

e) $\left(2,\frac{13}{2}\right)$

f) $\left(\frac{-5}{2},\frac{-19}{2}\right)$

g) $\left(\frac{9}{2},\frac{-11}{4}\right)$

h) $\left(\frac{11}{4},\frac{11}{4}\right)$

i) $\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2},\frac{9}{2}\right)$

j) $\left(\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2},\frac{5+\sqrt{3}}{2}\right)$

k) $(0,0)$

l) $(7,0)$

m) $(0,0)$

n) $\left(\frac{3}{2},2\right)$

o) $\left(\frac{\sqrt{7}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Ejercicio 6

Para que el triángulo sea isósceles, dos de sus lados deben tener igual medida.

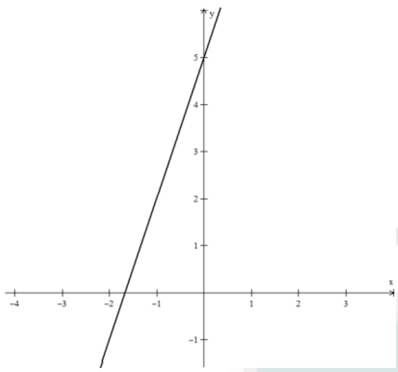
$$d(A,B)=\sqrt{(9-3)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}.$$
$$d(A,C)=\sqrt{(5-3)^2+(-5-1)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}.$$

Dado que se cumple que $d(A,B)=d(A,C)$, el triángulo es isósceles.

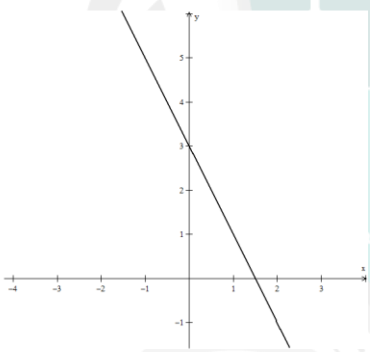
Ejercicios de la sección 4.2

Ejercicio 1

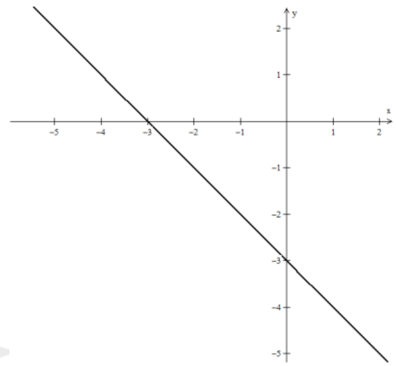
a) $y = 3x + 5$



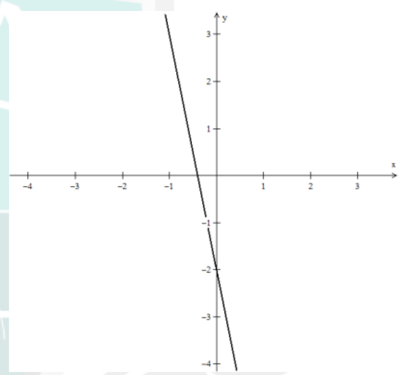
b) $y = -2x + 3$



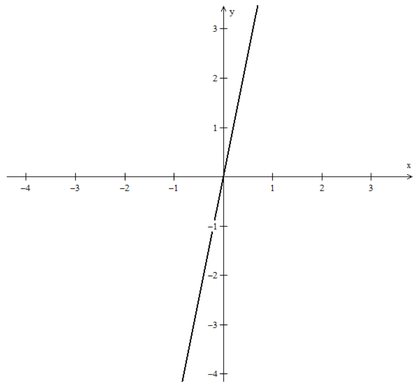
c) $y = -x - 3$



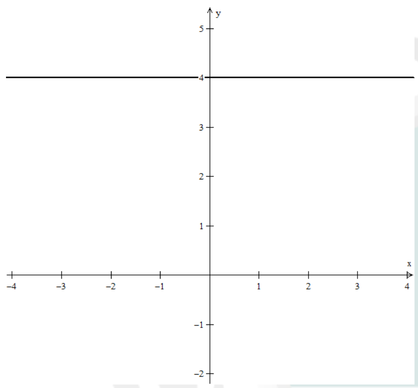
d) $y = -5x - 2$



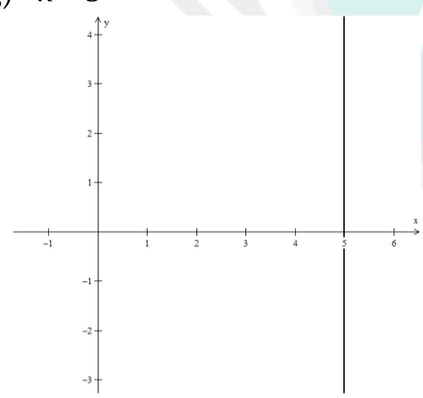
e) $y = 5x$



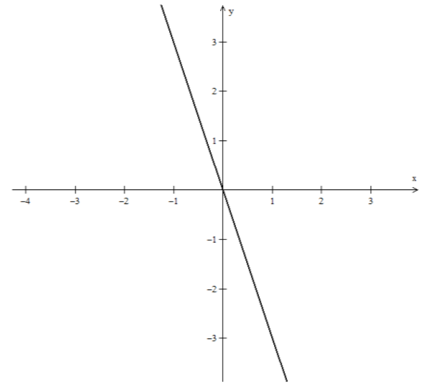
f) $y=4$



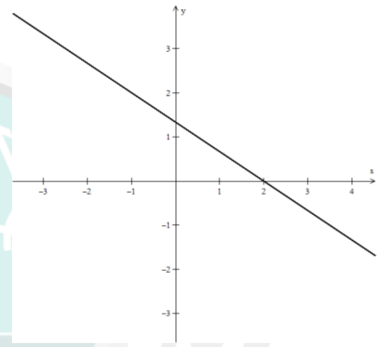
g) $x=5$



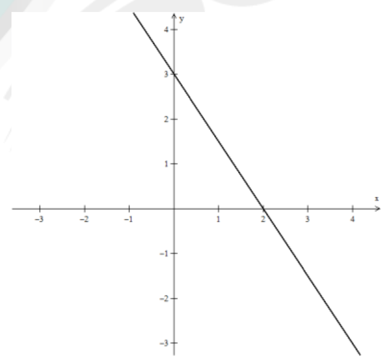
h) $y=-3x$



i) $2x+3y=4$



j) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1$



Ejercicio 2

a) $m=\frac{-5}{2}$

b) $m=-1$

c) $m=\frac{-8}{7}$

d) La pendiente no está definida.

e) La pendiente no está definida.

f) $m=\frac{-25}{2}$

g) $m=0$

h) $m=\frac{6}{7}$

i) $m=1$

j) $m=\frac{-4}{3}$

k) $m=0$

l) $m=10$

Ejercicio 3

a) $y=3x-5$

b) $y=-x$

c) $y=-5x-5$

d) $y=\frac{3}{24}x-12$

e) $y=x$

f) $y=-4x+\frac{1}{2}$

g) $y=7$

h) $y=5$

i) $y=\frac{-2}{15}x+\frac{21}{2}$

j) $y=x$

k) $y=-22x+7$

l) $y=-5x-51$

Ejercicio 4

a) $y=2x-5$

b) $y=7x$

c) $y=\frac{-9}{7}x-9$

d) $y=-3x-3$

e) $y=\frac{5}{3}x-3$

f) $y=\frac{-1}{3}x-\frac{8}{3}$

g) $y=-2x-3$

h) $y=\frac{4}{5}x-\frac{7}{5}$

i) $x=3$

j) $x=7$

k) $y=7$

l) $x=-3$

Ejercicio 5

a) $y=x+2$

b) $y=-x+2$

c) $y=\frac{-1}{2}x-2$

d) $y=x-3$

e) $x=-3$

f) $y=2$

g) $y=2x+5$

h) $y=-3x+2$

Ejercicio 6

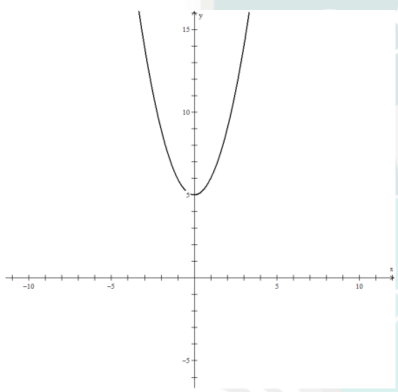
$$P\left(-2, \frac{-1}{8}\right)$$

Ejercicio 7

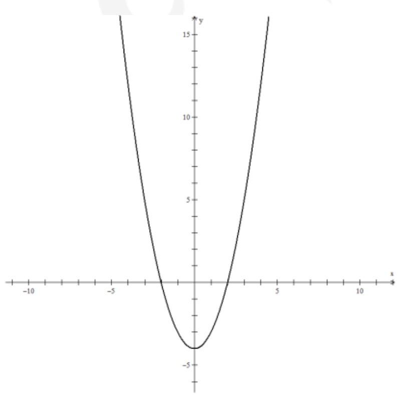
$$\frac{\sqrt{34}}{17}$$

Ejercicio 8

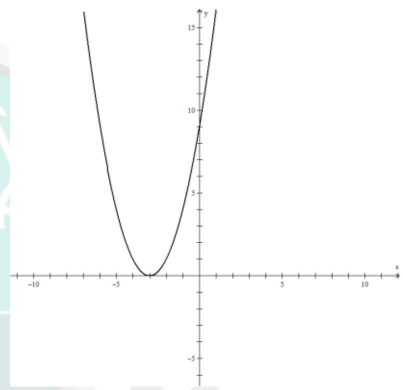
a) $y = x^2 + 5$



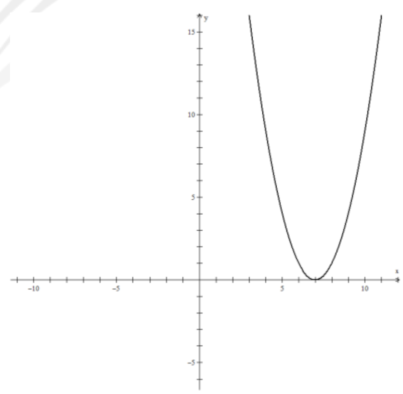
b) $y = x^2 - 4$



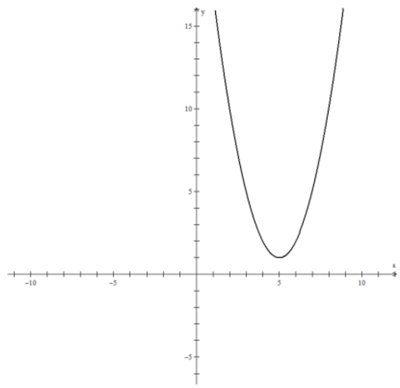
c) $y = (x+3)^2$

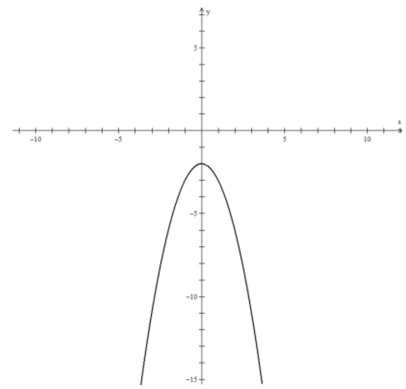


d) $y = (x-7)^2$



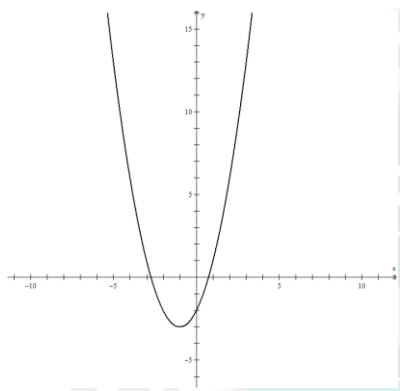
e) $y = (x-5)^2 + 1$

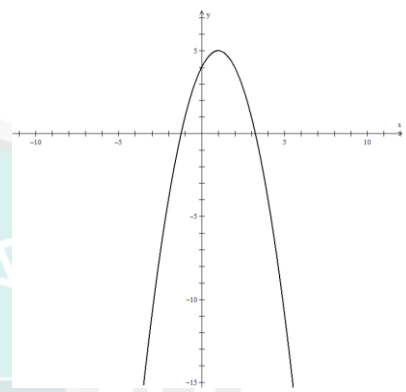




f) $y=(x+1)^2-3$

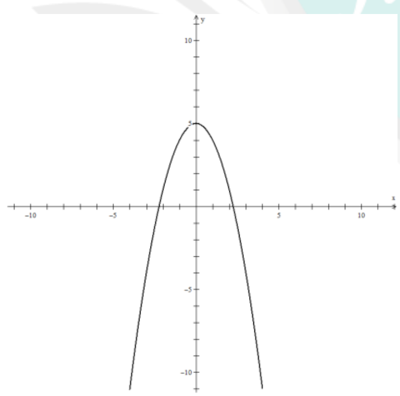
i) $y=-(x-1)^2+5$

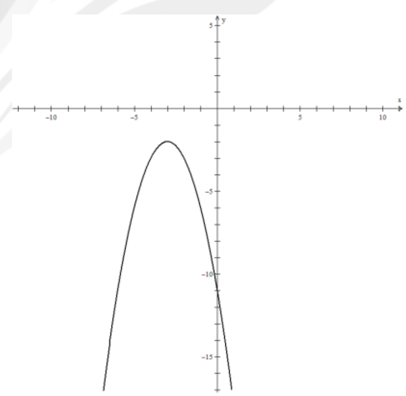




g) $y=-x^2+5$

j) $y=-(x+3)^2-2$





h) $y=-x^2-2$

Ejercicio 9

a) $y=(x+3)^2-5$

b) $y=(x-1)^2+2$

c) $y=(x+7)^2-30$

d) $y=(x-4)^2-10$

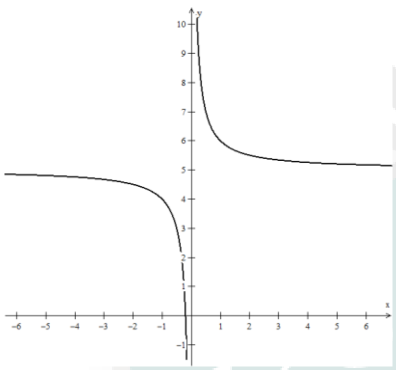
e) $y=(x-3)^2-9$

f) $y=(x+5)^2-25$

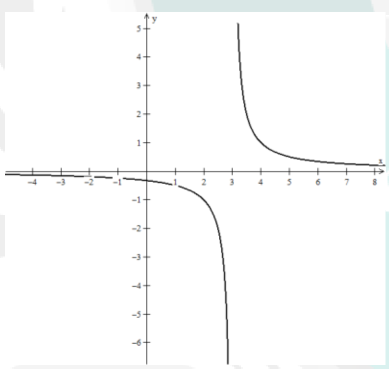
Ejercicios de la sección 4.3

Ejercicio 1

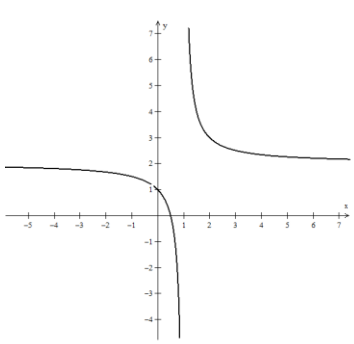
a) $y=\dfrac{1}{x}+5$



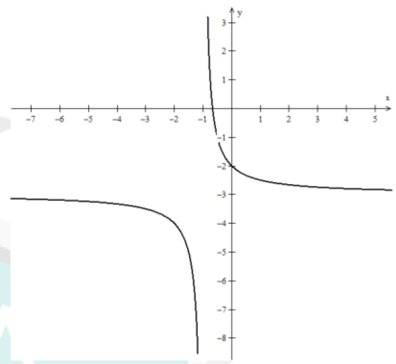
b) $y=\dfrac{1}{x-3}$



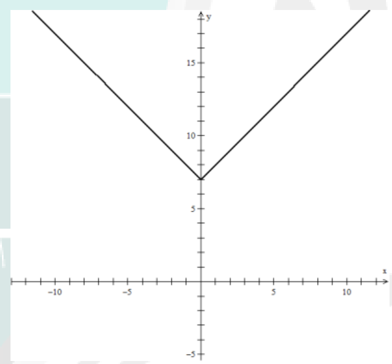
c) $y=\dfrac{1}{x+1}-3$



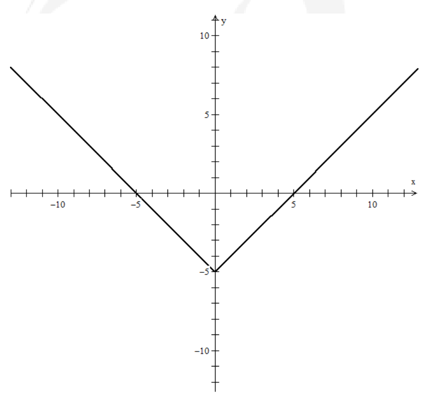
d) $y=\dfrac{1}{x-1}+2$



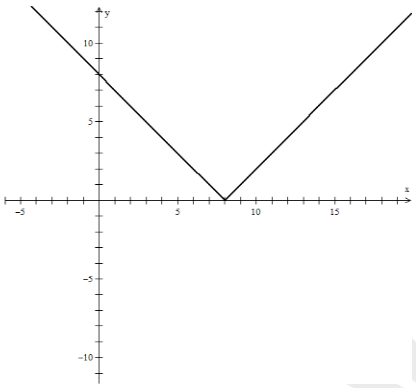
e) $y=|x|+7$



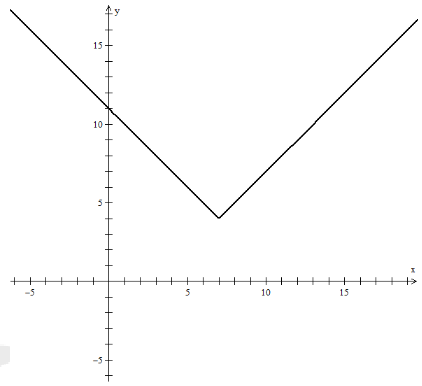
f) $y=|x|-5$



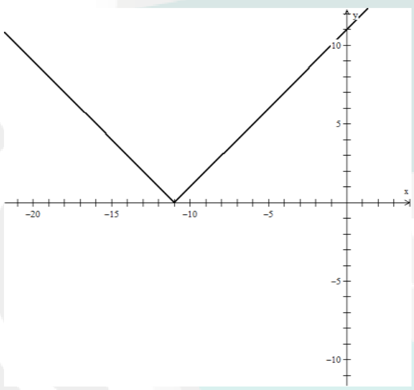
g) $y = |x-8|$



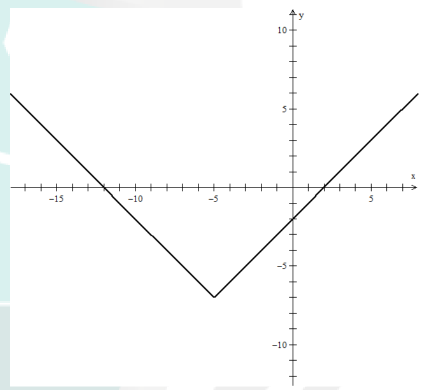
i) $y = |x-7| + 4$



h) $y = |x+11|$



j) $y = |x+5| - 7$



Ejercicio 2

a) $x^2 + y^2 = 49$

b) $x^2 + y^2 = 16$

c) $(x+3)^2 + y^2 = 81$

d) $(x-2)^2 + y^2 = 25$

e) $x^2 + (y+6)^2 = 36$

f) $x^2 + (y-5)^2 = 1$

g) $(x+5)^2 + (y-2)^2 = 4$

h) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 64$

i) $(x+6)^2 + (y+1)^2 = 49$

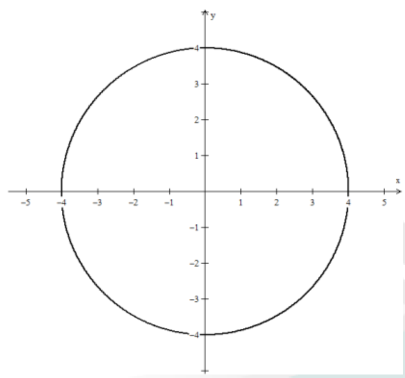
j) $(x-7)^2 + (y+6)^2 = 100$

k) $(x+5)^2 + (y+3)^2 = 5$

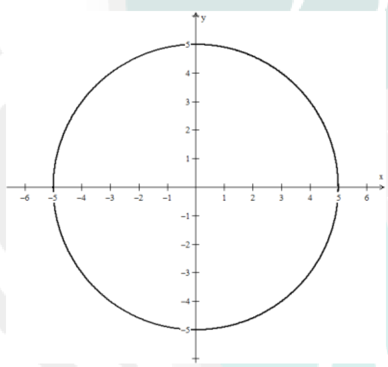
l) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 11$

Ejercicio 3

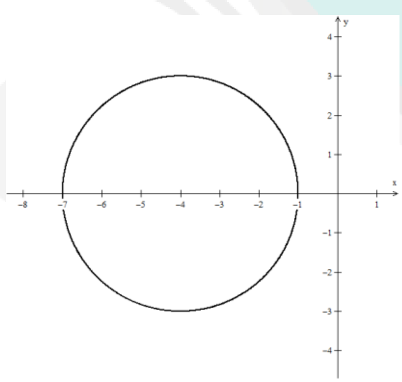
a) Centro (0,0), radio 4



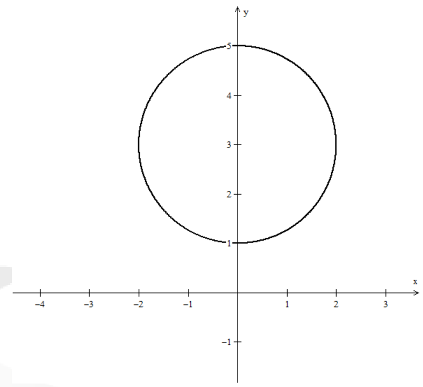
b) Centro (0,0), radio 5



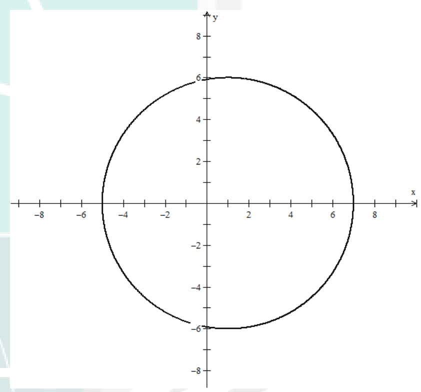
c) Centro (–4,0), radio 3



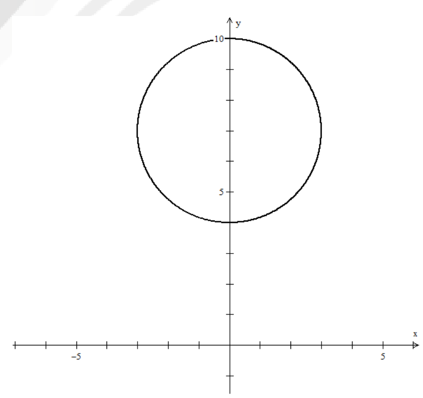
d) Centro (0,3), radio 2



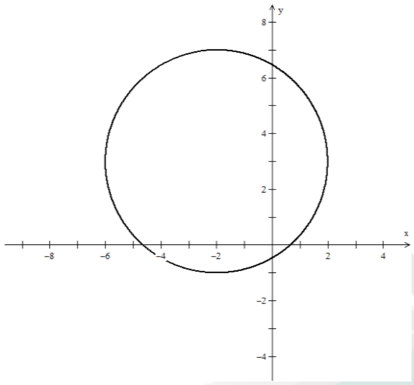
e) Centro (1,0), radio 6



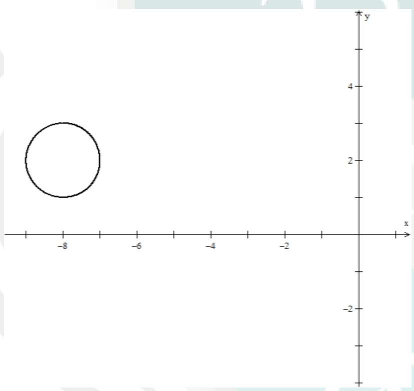
f) Centro (0,7), radio 3



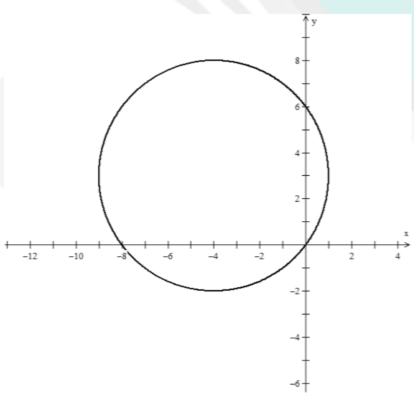
g) Centro (–2,3), radio 4



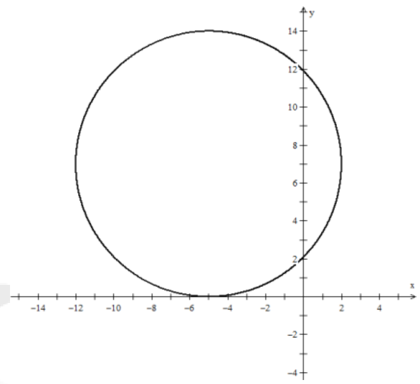
h) Centro (–8,2), radio 1



i) Centro (–4,3), radio 5



j) Centro (–5,7), radio 7



Ejercicio 4

$$(x-5)^2+(y-4)^2=41$$

Ejercicio 5

$$(x-3)^2+(y-2)^2=4$$

Ejercicios de autoevaluación

Ejercicio 1

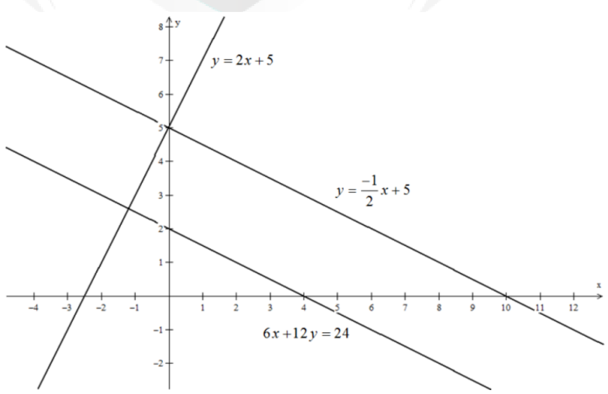
a) Se escribe la ecuación dada en la forma $y = mx + b$:

$$6x + 12y = 24$$
$$\Leftrightarrow 12y = -6x + 24$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{-6x + 24}{12}$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{-1}{2}x + 2.$$

La pendiente de esa recta es $m = \frac{-1}{2}$. Como la recta que se solicita es paralela a la anterior, debe tener igual pendiente, es decir, $m_1 = \frac{-1}{2}$. Además, como se sabe que corta el eje y en 5, su ecuación es $y = \frac{-1}{2}x + 5$.

b) Se pide la ecuación de una recta perpendicular a la recta dada; quiere decir que su pendiente debe ser el recíproco negativo de $m_1 = \frac{-1}{2}$, es decir, $m_2 = 2$. Se puede verificar que $\frac{-1}{2} \cdot 2 = -1$. Dado que la recta solicitada también pasa por $(0,5)$ se tiene que su ecuación es $y = 2x + 5$.

c) Gráficas de las tres rectas:

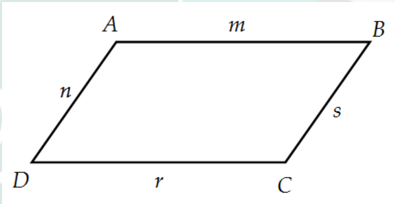


Ejercicio 2

Primero, se sustituye el punto $A(1,2)$ en las rectas dadas para conocer si dichas rectas lo contienen.

$$r: 3\cdot 1 - 5\cdot 2 \neq 2.$$
$$s: 6\cdot 1 - 7\cdot 2 \neq 1.$$

Por lo tanto, el punto $A(1,2)$ no pertenece a ninguna de las dos rectas. Entonces, el paralelogramo se puede dibujar de la siguiente manera:



Observe que el vértice C es la intersección de las rectas r y s, entonces, para hallarlo, se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ 6x - 7y = 1. \end{cases}$$

Al aplicar el método de eliminación, se multiplica por –2 la primera ecuación y se suma; así, se elimina la variable x.

$$\begin{array}{l} \begin{cases} -6x + 10y = -4 \\ 6x - 7y = 1 \end{cases} \\ \hline 3y = -3 \\ y = -1. \end{array}$$

Se sustituye y en cualquier ecuación para obtener que $x = -1$. Por lo tanto, el vértice C es el punto $(-1,-1)$.

En segundo lugar, para obtener el vértice B, se requiere determinar la ecuación de la recta m, la cual es la recta paralela a r y que pasa por $A(1,2)$.

Dado que $m \parallel r$, sus pendientes son iguales. La pendiente de la recta r es $\frac{3}{5}$, al sustituir el punto $A(1,2)$, se obtiene la ecuación $m: 3x-5y=-7$.

Como el punto B es la intersección de las rectas m y s, se debe resolver el sistema que sigue para conseguir su valor:

$$\begin{cases} 3x-5y=-7 \\ 6x-7y=1. \end{cases}$$

Al aplicar nuevamente el método de eliminación, se obtiene que $B(6,5)$.

Por último, para obtener el vértice D, se procede de manera similar. El punto D es la intersección de las rectas r y n. Note que $n \parallel s$, entonces tienen igual pendiente (puede verificar que es $\frac{6}{7}$). Dado que n pasa por $A(1,2)$, se consigue que $n: 6x-7y=-8$.

Al resolver el sistema que se presenta a continuación, se obtiene que $D(-6,-4)$.

$$\begin{cases} 3x-5y=2 \\ 6x-7y=-8. \end{cases}$$

Por lo tanto, los vértices del paralelogramo $ABCD$ son, respectivamente, $A(1,2)$, $B(6,5)$, $(-1,-1)$ y $D(-6,-4)$.

Ejercicio 3

a) Se debe obtener la distancia entre cada pareja de vértices:

$$d(A,B)=\sqrt{(3--2)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}\approx 6{,}32.$$
$$d(B,C)=\sqrt{(-1-3)^2+(-2--1)^2}=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}\approx 4{,}12.$$
$$d(A,C)=\sqrt{(-1--2)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{1+25}=\sqrt{26}\approx 5{,}1.$$

Dado que los tres lados tienen distinta medida, el triángulo es escaleno.

b) La pendiente de la recta buscada es $m=\frac{-1-3}{3--2}=\frac{-4}{5}$. La recta es de la forma $y=\frac{-4}{5}x+b$. Se sustituye el punto $A(-2,3)$ y se obtiene:

$$3=\frac{-4}{5}\cdot -2+b$$
$$\Rightarrow 3-\frac{8}{5}=b$$
$$\Rightarrow \frac{7}{5}=b.$$

De esta manera, la ecuación de la recta que contiene los puntos A y B es $y=\frac{-4}{5}x+\frac{7}{5}$.

c) Recuerde que la mediatriz de un segmento es la recta perpendicular a este y que pasa por su punto medio. Entonces, primero, se determinará el punto medio y, después, la recta perpendicular a AB que pasa por el punto medio.

Sea M el punto medio del segmento AB, se tiene que:

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$
$$\Rightarrow M=\left(\frac{-2+3}{2},\frac{3+-1}{2}\right)$$
$$\Rightarrow M=\left(\frac{1}{2},1\right).$$

Ahora, en el punto b) anterior, se obtuvo que la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B es $y=\frac{-4}{5}x+\frac{7}{5}$. Sobre esta recta está localizado el segmento AB. Una recta perpendicular a dicho segmento, tiene pendiente igual a $\frac{5}{4}$.

La mediatriz se obtiene al reemplazar el punto M en $y=\frac{5}{4}x+b$.

$$\begin{aligned}
&1=\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{2}+b\\
&\Rightarrow 1=\frac{5}{8}+b\\
&\Rightarrow b=\frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación de la mediatriz sobre el lado AB es $y=\frac{5}{4}x+\frac{3}{8}$.

Ejercicio 4

a) La ecuación $5y=-3x+9$ es equivalente a $y=\frac{-3x+9}{5}$.

El corte en el eje x se da en $(3,0)$ y el corte en y es el punto $\left(0,\frac{9}{5}\right)$.

b) La ecuación $7=y+5$ es equivalente a $y=2$. De esta manera, no corta el eje x y corta el eje y en $(0,2)$.

c) La parábola de ecuación $y=-x^2+8x-12$ corta el eje y en $(0,-12)$. Para encontrar los cortes en el eje x, se resuelve $0=-x^2+8x-12$, de donde se obtienen los puntos $(2,0)$ y $(6,0)$.

d) La parábola de ecuación $y=x^2+3$ no corta el eje x. La intersección con el eje y se da en el punto $(0,3)$.

e) La ecuación $y=\frac{7}{x}$ es equivalente a $y=7\left(\frac{1}{x}\right)$; en consecuencia, tiene la misma forma que la gráfica de $y=\frac{1}{x}$. Esta gráfica no interseca al eje x ni al eje y.

f) Para encontrar la intersección de la gráfica de $x^2+y^2+4x-6y+12=0$ con el eje x, se hace $y=0$.

$$\begin{aligned}&x^2+0^2+4x-6\cdot 0+12=0\\ \Leftrightarrow\ &x^2+4x+12=0.\end{aligned}$$

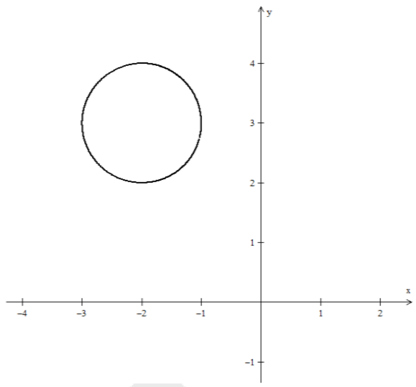
Se puede verificar que esta ecuación no tiene soluciones reales; por ende, esta gráfica carece de intersecciones con el eje x.

De manera análoga, para encontrar la intersección de la gráfica de $x^2+y^2+4x-6y+12=0$ con el eje y, se hace $x=0$.

$$\begin{aligned}&0^2+y^2+4\cdot 0-6y+12=0\\ \Leftrightarrow\ &y^2-6y+12=0.\end{aligned}$$

La ecuación anterior tampoco tiene soluciones reales, entonces, la gráfica de $x^2+y^2+4x-6y+12=0$, tampoco interseca al eje y.

Al completar cuadrados, la ecuación $x^2+y^2+4x-6y+12=0$ se puede escribir como $(x+2)^2+(y+3)^2=1$, correspondiente a una circunferencia con centro en $(-2,3)$ y radio 1. A continuación, se presenta su gráfica. Observe que, en efecto, no interseca los ejes coordenados.



Ejercicio 5

a) Circunferencia de radio 2 y centro en el punto $(1,-2)$, la ecuación es $(x-1)^2+(y+2)^2=4$.

b) Circunferencia de radio 2 y centro en el punto $(-1,2)$, la ecuación es $(x+1)^2+(y-2)^2=4$.

c) Circunferencia de radio 3 y centro en el punto $(3,-3)$, la ecuación es $(x-3)^2+(y+3)^2=9$.

d) Circunferencia de radio 3 y centro en el punto $(-3,3)$, la ecuación es $(x+3)^2+(y-3)^2=9$.

Fuentes consultadas

Ávila, J. (2003). *Álgebra y Trigonometría*. Cartago: Editorial Tecnológica.

Barrantes, H. (2005). *Introducción a la Matemática*. San José, Costa Rica: EUNED.

Barrantes, H. (2010). *Matemática Básica para Administración*. San José, Costa Rica: EUNED.

Chacel, R. (s. f.). George Polya. Estrategias para la resolución de problemas. Recuperado de http://ficus.pntic.mec.es/fheb0005/Hojas_varias/Material_de_apoyo/-Estrategias%20de%20Polya.pdf

Goodman, A. y Hirsch, L. (1996). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México: Prentice Hall.

Larson, R. y Hostetler, R. (2010). *Precálculo* (7.ª ed.). México, D. F.: Editorial Reverté S. A.

Ministerio de Hacienda (2017). Impuesto sobre la renta (régimen tradicional). Recuperado de http://www.hacienda.go.cr/contenido/12994-regimen-tradicional

Murillo, M., Soto, A. y Araya, J. (2003). *Matemática básica con aplicaciones*. San José, Costa Rica: EUNED.

Paul, R. y Haeussler, E. (2003). *Matemáticas para administración y economía* (10.ª ed.). México: Pearson.

Ruiz, A. (2003). *Historia y Filosofía de las matemáticas*. San José, Costa Rica: EUNED.

Sullivan, M. (2013). *Álgebra y Trigonometría* (9.ª ed.). México, D. F.: Pearson.

Zill, D. y Wright, W. (2011). *Cálculo. Trascendentes tempranas* (4.ª ed.). México, D. F.: McGraw-Hill.