Solución de ejercicios impares sección 3.1

Ejercicio 1

a) $9x+2x<4$ Es una inecuación en una variable.

b) $\cos(t)+e^{t}\leq 2$ Es una inecuación en una variable.

c) $x^{5}+x^{4}-x^{3}-7x>11-x^{2}$ Es una inecuación en una variable.

d) $-5x^{2}+y<3z$ Es una inecuación en tres variables.

e) $m^{2}+n^{2}\leq t^{2}$ Es una inecuación en tres variables.

f) $\cos(x)\geq \ln(y)$ Es una inecuación en dos variables.

g) $\cos(t)+y>\ln(z)+e^{x}$ Es una inecuación en cuatro variables.

h) $\frac{x^{2}}{9}+\frac{y^{2}}{16}\leq 1$ Es una inecuación en dos variables.

i) $x^{2}+y^{2}+z^{2}\leq 16$ Es una inecuación en tres variables.

j) $k^{2}+7x<4y$ Es una inecuación en tres variables.

Ejercicio 2

a) $[2,3]=\{x/x\in\mathbb{R},2\leq x\leq 3\}$

b) $\left]-\sqrt{3},\frac{100}{7}\right]=\left\{m/m\in\mathbb{R},-\sqrt{3}<m\leq\frac{100}{7}\right\}$

c) $\left[-1000,275\right[=\left\{b/b\in\mathbb{R},-1000\leq b<275\right\}$

d) $\left]\frac{12}{5},\frac{7000}{3}\right[=\left\{k/k\in\mathbb{R},\frac{12}{5}<k<\frac{7000}{3}\right\}$

e) $\left]\frac{12}{5},\infty\right[=\left\{y/y\in\mathbb{R},y>\frac{12}{5}\right\}$

f) $\left]-\infty,\sqrt{2123}\right[=\left\{p/p\in\mathbb{R},p<\sqrt{2123}\right\}$

g) $\left]-\infty,0\right]=\left\{x/x\in\mathbb{R},x\leq 0\right\}$

h) $\left[\frac{\sqrt{3}}{2},\infty\right[=\left\{t/t\in\mathbb{R},t\geq\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

i) $\left[-e,2\pi\right[=\left\{x/x\in\mathbb{R},-e\leq x<2\pi\right\}$

j) $\left]-2\sqrt{2},\frac{\pi+e}{2}\right[=\left\{y/y\in\mathbb{R},-2\sqrt{2}<y<\frac{\pi+e}{2}\right\}$

Ejercicio 3

a) $\left\{x,x\in\mathbb{R}/x>12\right\}=\left]12,\infty\right[$

b) $\left\{k,k\in\mathbb{R}/-27\sqrt{12}<k\leq 198\right\}=\left]-27\sqrt{12},198\right]$

c) $\left\{y,y\in\mathbb{R}/\frac{-12}{5}\leq y\leq\frac{3\sqrt[5]{4}}{2}\right\}=\left[\frac{-12}{5},\frac{3\sqrt[5]{4}}{2}\right]$

d) $\left\{n,n\in\mathbb{R}/2<n\right\}=\left]2,\infty\right[$

e)	$\left\{x, x \in \mathbb{R} / x > \frac{-11}{7}\right\} = \left]\frac{-11}{7}, \infty\right[$
f)	$\left\{t, t \in \mathbb{R} / -2e < t < 1000\sqrt{2}\right\} = \left]-2e, 1000\sqrt{2}\right[$
g)	$\left\{a, a \in \mathbb{R} / a \leq 21\right\} = \left]-\infty, 21\right]$
h)	$\left\{b, b \in \mathbb{R} / b \geq \frac{-1}{3}\right\} = \left[\frac{-1}{3}, \infty\right[$

Ejercicio 4

a)	Todos los números enteros mayores que –3, pero menores que 8. Es decir, $\{-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$.
b)	Todos los números naturales mayores que –1000, pero menores o iguales que 2. Es decir, $\{1,2\}$. Recuerde: ni los números negativos ni el cero son números naturales.
c)	Todos los números naturales mayores que $-\sqrt{2}$, pero menores o iguales que $3\sqrt{3}$. Es decir, a $\{1,2,3,4,5\}$.
d)	Todos los números enteros mayores o iguales que $\frac{-11}{2}$, pero menores o iguales que e. Es decir, $\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2\}$.
e)	Todos los números naturales mayores –10. Es decir, $\{1,2,3,4,5,6,7,8,...\} = \mathbb{N}$. Recuerde: –9, –8, –7, –6, –5, –4, –3, –2, –1 y 0 no son números naturales.

f) Todos los números reales mayores que –10, pero menores que 5. Es decir, $\left]-10,5\right[$.

g) Todos los números naturales menores que –21. Es decir, es un conjunto vacío.

h) Todos los números enteros mayores o iguales que –2, pero menores o iguales que 2. Es decir, $\left\{-2,-1,0,1,2\right\}$.

Ejercicio 5

3. Determine si el valor, o los valores dados, es o no solución de la inecuación.

a) $2a+1<0$ si $a=-5$. Al sustituir al lado izquierdo y resolver se tiene que $2\cdot(-5)+1=-10+1=-9$ como $-9<5$ se concluye que $a=-5$ sí es solución de la inecuación.

b) $2(n+5)-3(2n+1)\geq 5\left(\frac{3n+3}{2}\right)$ si $n=\sqrt{5}$. No es solución de la inecuación.

c) $\frac{2m^2+1}{5}+2m^2\geq 5m^2+50$ si $m=\sqrt{2}$. Al sustituir y resolver se tiene que

- Al lado izquierdo $\frac{2\left(\sqrt{2}\right)^2+1}{5}+2\left(\sqrt{2}\right)^2=\frac{2\cdot 2+1}{5}+2\cdot 2=\frac{5}{5}+4=1+4=5$
- Al lado derecho $5\left(\sqrt{2}\right)^2+50=5\cdot 2+50=10+50=60$

Dado que 5 no es mayor ni igual que 60 se tiene que $m=\sqrt{2}$ no es solución de la inecuación.

d) $(3x+2)^2-(2x+1)>2x^2-4x+6$ si $x=9$. Sí es solución de la inecuación.

e) $\frac{-3n^2+n+1}{2}<2n+1$ si $n=0$. Al sustituir y resolver se tiene que

	▪ Al lado izquierdo $\frac{-3(0)^2+(0)+1}{2}=\frac{-3\cdot 0+0+1}{2}=\frac{0+0+1}{2}=\frac{1}{2}$ ▪ Al lado derecho $2(0)+1=0+1$ Dado que $\frac{1}{2}$ es menor que 1 se tiene que $n=0$ es solución de la inecuación.
f)	$(x+1)^2<x^2+2x+1$ si $x=-4$. No es solución de la inecuación.
g)	$m^3+8\leq(m+2)(m^2-2m+4)$ si $m=\sqrt{2}$. Al sustituir y resolver se tiene que ▪ Al lado izquierdo $\left(\sqrt{2}\right)^3+8=\sqrt{2^3}+8=2\sqrt{2}+8$ ▪ Al lado derecho $\left(\sqrt{2}+2\right)\left(\left(\sqrt{2}\right)^2-2\left(\sqrt{2}\right)+4\right)$ $=\left(\sqrt{2}+2\right)\left(2-2\sqrt{2}+4\right)$ $=\left(\sqrt{2}+2\right)\left(6-2\sqrt{2}\right)$ $=6\sqrt{2}-2\sqrt{4}+12-4\sqrt{2}$ $=6\sqrt{2}-2\cdot 2+12-4\sqrt{2}$ $=2\sqrt{2}-4+12$ $=2\sqrt{2}+8$ Dado que $2\sqrt{2}+8\leq 2\sqrt{2}+8$, se cumple con la igualdad, se tiene que $m=\sqrt{2}$ es solución de la inecuación.
h)	$t^4+4t<(t+1)^2+(2t+1)^6$ si $t=-1$. Sí es solución de la inecuación.
i)	$\sqrt{21+\sqrt{s}}\geq\frac{2+s}{9}$ si $s=16$. Al sustituir y resolver se tiene que ▪ Al lado izquierdo $\sqrt{21+\sqrt{16}}=\sqrt{21+4}=\sqrt{25}=5$ ▪ Al lado derecho $\frac{2+16}{9}=\frac{18}{9}=2$ Dado que 5 es mayor o igual que 2, se tiene que $s=16$ es solución de la inecuación.
j)	$x^2+y^2\leq z^2$ si $x=\sqrt{2}$, $y=-4$ y $z=7$. Sí son solución de la inecuación.

k) $m^3 - n^2 > z^2$ si $m = -11,\ n = -5$ y $z = \sqrt{124}$. Al sustituir y resolver se tiene que

- Al lado izquierdo $(-11)^3 - (-5)^2 = -1331 - 25 = -1356$
- Al lado derecho $\left(\sqrt{124}\right)^2 = 124$

Dado que –1356 no es mayor que 124, se tiene que $m = -11,\ n = -5$ y $z = \sqrt{124}$ no son solución de la inecuación.

l) $\sqrt{x^2 + 2x + 1} < \dfrac{x+1}{2}$ para $x = -10$ y para $x = \dfrac{-3}{2}$. No son solución de la inecuación.

m) $p^2 < p$ para $p = -1$ y para $p = \sqrt{2}$. Para $p = -1$al sustituir y resolver se tiene que $(-1)^2 = 1$. Dado que 1 no es menor que -1, se tiene que $p = -1$ no es solución de la inecuación.

Para $p = \sqrt{2}$, al sustituir y resolver se tiene que $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$. Dado que 2 no es menor que $\sqrt{2}$, se tiene que $p = \sqrt{2}$ no es solución de la inecuación.

n) $k^3 + k^2 + k + 1 < k^5$ para $k = 0$ y para $k = 7$. $k = 0$ no es solución pero $k = 7$ sí.

o) $\dfrac{x^2 + 3x + 1}{x+1} < \dfrac{2x+4}{x^2 + 7x}$ si $x = -11$. Al sustituir y resolver se tiene que

- Al lado izquierdo $\dfrac{(-11)^2 + 3(-11) + 1}{(-11) + 1} = \dfrac{121 - 33 + 1}{-10} = \dfrac{89}{-10} = \dfrac{-89}{10}$
- Al lado derecho $\dfrac{2(-11) + 4}{(-11)^2 + 7(-11)} = \dfrac{-22 + 4}{121 - 77} = \dfrac{-18}{44} = \dfrac{-9}{22}$

Dado que $\dfrac{-89}{10}$ es menor que $\dfrac{-9}{22}$, se tiene que $x = -11$es solución de la inecuación.

p) $\dfrac{1}{x+1} + 2x \leq \dfrac{1}{x^2 + 2x + 1} + x$ si $x = 21$. Sí es solución de la ecuación.

Ejercicio 6

a) Dado que ₡54 000 000 pertenece a $]52634000,105872000]$, entonces para determinar el monto que se deberá cancelar por impuesto se calcula con la expresión $0,2x$ con $x=54000000$, así $0,2\cdot 54000000=10080000$.
Por tanto, si el ingreso neto durante el periodo fiscal es de ₡54 000 000 se debe pagar un impuesto de ₡10 080 000.

b) Dado que ₡49 000 000 pertenece a $[0,52634000]$, entonces para determinar el monto que se deberá cancelar por impuesto se calcula con la expresión $0,1x$ con $x=49000000$, así $0,1\cdot 49000000=4900000$.
Por tanto, si el ingreso neto durante el periodo fiscal es de ₡49 000 000 se debe pagar un impuesto de ₡4 900 000.

Ejercicio 7

Al utilizar la expresión $IMC=\dfrac{peso\,en\,kilogramos}{(talla\,en\,metros)^2}$ se tiene que

$$IMC=\frac{82}{(1,8)^2}=\frac{82}{3,24}=25,3086$$

Como $25\leq 25,3086<30$ se concluye que la persona tiene sobrepeso.

Ejercicios de la sección 3.2

Ejercicio 1

a) $x-\sqrt{2} > 2\left(x-2\sqrt{2}\right)+3\left(x+\sqrt{2}\right)$

$$x-\sqrt{2} > 2\left(x-2\sqrt{2}\right)+3\left(x+\sqrt{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x-\sqrt{2} > 2x-4\sqrt{2}+3x+3\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2}+4\sqrt{2}-3\sqrt{2} > 2x+3x-x$$

$$\Leftrightarrow 0 > 4x$$

$$\Leftrightarrow \frac{0}{4} > x$$

$$\Leftrightarrow 0 > x$$

Por tanto $S = \left]-\infty, 0\right[= \left\{x, x \in \mathbb{R} / x < 0\right\}$.

b) $S = \left]-\infty, \frac{-15}{2}\right[= \left\{x, x \in \mathbb{R} / x < \frac{-15}{2}\right\}$

c) $\frac{4n+1}{6} \leq \frac{11n+4}{5}$

$$\frac{3n+1}{6} \leq \frac{11n+4}{5}$$

$$\Leftrightarrow 5(3n+1) \leq 6(11n+4)$$

$$\Leftrightarrow 15n+5 \leq 66n+24$$

$$\Leftrightarrow 15n-66n \leq 24-5$$

$$\Leftrightarrow -51n \leq 19$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{-19}{51}$$

Por tanto $S = \left[\frac{-19}{51}, \infty\right[= \left\{n, n \in \mathbb{R} / n \geq \frac{-19}{51}\right\}$.

d) $S = \left]\frac{-14}{9},\infty\right[= \left\{x \in \mathbb{R} / x > \frac{-14}{9}\right\}$

e) $4x+1 > (2x+1)-7(x+2)$

$$\begin{aligned} & 4x+1 > (2x+1)-7(x+2) \\ \Leftrightarrow\ & 4x+1 > 2x+1-7x-14 \\ \Leftrightarrow\ & 4x-2x+7x > 1-14-1 \\ \Leftrightarrow\ & 9x > -14 \\ \Leftrightarrow\ & x > \frac{-14}{9} \end{aligned}$$

Por tanto $S = \left]\frac{-14}{9},\infty\right[= \left\{x \in \mathbb{R} / x > \frac{-14}{9}\right\}$.

f) $S = \left[\frac{-41}{62},\infty\right[= \left\{x \in \mathbb{R} / x \geq \frac{-41}{62}\right\}$

g) $6\left(\frac{y+1}{2}\right) \geq 7\left(\frac{y-4}{5}\right)-3\left(\frac{y+3}{2}\right)$

$$\begin{aligned} & 6\left(\frac{y+1}{2}\right) \geq 7\left(\frac{y-4}{5}\right)-3\left(\frac{y+3}{2}\right) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{6y}{2}+\frac{6}{2} \geq \frac{7y}{5}-\frac{28}{5}-\frac{3y}{2}-\frac{9}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{6y}{2}-\frac{7y}{5}+\frac{3y}{2} \geq -\frac{28}{5}-\frac{9}{2}-\frac{6}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{31y}{10} \geq \frac{-131}{10} \\ \Leftrightarrow\ & y \geq \frac{-131 \cdot 10}{10 \cdot 31} \\ \Leftrightarrow\ & y \geq \frac{-131}{31} \end{aligned}$$

Por tanto $S = \left[\frac{-131}{31},\infty\right[= \left\{y, y \in \mathbb{R} / y \geq \frac{-131}{31}\right\}$.

h) $S = \left]-2,\infty\right[= \{m, m \in \mathbb{R} / m > -2\}$

i) $7+6(x-2)<3(x+1)-7(x+2)$

$$\begin{aligned} & 7+6(x-2)<3(x+1)-7(x+2) \\ \Leftrightarrow\ & 7+6x-12<3x+3-7x-14 \\ \Leftrightarrow\ & 6x-5<-4x-11 \\ \Leftrightarrow\ & 6x+4x<-11+5 \\ \Leftrightarrow\ & 10x<-6 \\ \Leftrightarrow\ & x<\frac{-6}{10} \\ \Leftrightarrow\ & x<\frac{-3}{5} \end{aligned}$$

Por tanto $S = \left]-\infty, \frac{-3}{5}\right[= \left\{x, x \in \mathbb{R} / x < \frac{-3}{5}\right\}$.

j) $S = \left[\frac{-11}{15}, \infty\right[= \left\{n, n \in \mathbb{R} / n \geq \frac{-11}{15}\right\}$

k) $(3x+1)^2+(2x+3)^2 \leq (13x+1)(x-3)$

$$\begin{aligned} & (3x+1)^2+(2x+3)^2 \leq (13x+1)(x-3) \\ \Leftrightarrow\ & 9x^2+6x+1+4x^2+12x+9 \leq 13x^2-39x+x-3 \\ \Leftrightarrow\ & 13x^2+18x+10 \leq 13x^2-38x-3 \\ \Leftrightarrow\ & 13x^2-13x^2+18x+38x \leq -3-10 \\ \Leftrightarrow\ & 46x \leq -13 \\ \Leftrightarrow\ & x \leq \frac{-13}{46} \end{aligned}$$

Por tanto $S = \left]-\infty, \frac{-13}{46}\right] = \left\{x, x \in \mathbb{R} / x \leq \frac{-13}{46}\right\}$.

l) $S=\left]-\infty,\frac{3}{4}\right]=\left\{p, p\in\mathbb{R}\,/\,p\le\frac{3}{4}\right\}$

m) $\frac{3y-6}{2}\le\frac{2y+5}{6}$

$$\begin{aligned}
&\frac{3y-6}{2}\le\frac{2y+5}{6}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{3y}{2}-\frac{6}{2}\le\frac{2y}{6}+\frac{5}{6}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{3y}{2}-3\le\frac{y}{3}+\frac{5}{6}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{3y}{2}-\frac{y}{3}\le\frac{5}{6}+3\\
\Leftrightarrow\ &\frac{9y-2y}{6}\le\frac{5+18}{6}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{7y}{6}\le\frac{23}{6}\\
\Leftrightarrow\ &y\le\frac{23\cdot 6}{6\cdot 7}\\
\Leftrightarrow\ &y\le\frac{23}{7}
\end{aligned}$$

Por tanto $S=\left]-\infty,\frac{23}{7}\right]=\left\{y, y\in\mathbb{R}\,/\,y\le\frac{23}{7}\right\}$.

n) $S=\left]-\infty,\frac{86}{5}\right[=\left\{n, n\in\mathbb{R}\,/\,n<\frac{86}{5}\right\}$

o) $2-\left(-2x-2-\dfrac{x-3}{2}\right)\geq\dfrac{2x}{3}-\dfrac{5x-3}{12}+3x$

$$2-\left(-2x-2-\frac{x-3}{2}\right)\geq\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$$

$$\Leftrightarrow 2-\left(\frac{-4x-4-x+3}{2}\right)\geq\frac{8x-5x+3+36x}{12}$$

$$\Leftrightarrow 2-\left(\frac{-5x-1}{2}\right)\geq\frac{39x+3}{12}$$

$$\Leftrightarrow 2+\frac{5x}{2}+\frac{1}{2}\geq\frac{39x+3}{12}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4+5x+1}{2}\geq\frac{39x+3}{12}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x+5}{2}\geq\frac{39x+3}{12}$$

$$\Leftrightarrow 12\left(\frac{5x+5}{2}\right)\geq 39x+3$$

$$\Leftrightarrow 6(5x+5)\geq 39x+3$$

$$\Leftrightarrow 30x+30\geq 39x+3$$

$$\Leftrightarrow 30-3\geq 39x-30x$$

$$\Leftrightarrow 27\geq 9x$$

$$\Leftrightarrow \frac{27}{9}\geq x$$

$$\Leftrightarrow 3\geq x$$

Por tanto $S=\left]-\infty,3\right]=\{x, x\in\mathbb{R} / x\leq 3\}$.

p) $S=\left]-\infty,\dfrac{-4}{3}\right[=\left\{x, x\in\mathbb{R} / x<\dfrac{-4}{3}\right\}$

Ejercicio 2

Al sustituir las expresiones correspondientes se debe resolver

$$
\begin{aligned}
&15 \leq \frac{5}{9}(F-32) \leq 55 \\
\Leftrightarrow\ &15 \cdot 9 \leq 5(F-32) \leq 55 \cdot 9 \\
\Leftrightarrow\ &\frac{135}{5} \leq F-32 \leq \frac{495}{5} \\
\Leftrightarrow\ &27 \leq F-32 \leq 99 \\
\Leftrightarrow\ &27+32 \leq F \leq 99+32 \\
\Leftrightarrow\ &59 \leq F \leq 131
\end{aligned}
$$

Por tanto se tiene que $F \in [59,131]$.

Ejercicio 3

Como el grupo de niños tiene 10 años de edad, se tiene que $Q = 100 \cdot \frac{EM}{10} = 10 \cdot EM$.

$$
\begin{aligned}
&80 \leq 10 \cdot EM \leq 140 \\
\Leftrightarrow\ &\frac{80}{10} \leq EM \leq \frac{140}{10} \\
\Leftrightarrow\ &8 \leq EM \leq 14
\end{aligned}
$$

Por tanto se tiene que la edad mental del grupo de niños satisface que $EM \in [8,14]$.

Ejercicio 4

Al denotar con l la medida del largo y con a la medida del ancho, se debe satisfacer que

$$\begin{aligned} & l\cdot a > 90 \\ \Leftrightarrow\ & 15\cdot a > 90 \\ \Leftrightarrow\ & a > \frac{90}{10} \\ \Leftrightarrow\ & a > 9 \end{aligned}$$

Por tanto, el ancho deberá medir más de 9 cm.

Ejercicio 5

a) Como la expresión de la izquierda ya está factorizada entonces se construye el cuadro de variación, conociendo que $3x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \frac{-1}{3}$ (el signo de $3x+1$ es positivo cuando $x>\frac{-1}{3}$) y $4x-3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \frac{3}{4}$ (el signo de $4x-3$ es positivo cuando $x>\frac{3}{4}$)

	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{3}{4}$		∞
$3x+1$		-	●	+		+	
$4x-3$		-		-	●	+	
$(3x+1)(4x-3)$		+		-		+	

Por tanto $S = \left]-\infty, \frac{-1}{3}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, \infty\right[$.

b) $S = \left]-\infty,-\sqrt{2}\right]\cup\left[e,\infty\right[$

c) Dado que $-6k^2+7k-2<0 \Leftrightarrow (-2k+1)(3k-2)<0$, conociendo que $-2k+1<0 \Leftrightarrow k>\frac{1}{2}$ (tenga en cuenta que se debió invertir la desigualdad al pasar el factor negativo a dividir) y $3k-2<0 \Leftrightarrow k<\frac{2}{3}$

$-\infty$ $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ ∞

$-2k+1$	+ ○	-	-
$3k-2$	-	- ○	+
$(-2k+1)(3k-2)$	-	+	-

Por tanto $S = \left]-\infty,\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{2}{3},\infty\right[$.

d) $S=\mathbb{R}$

e) Dado que $6p^2+11p+3<0 \Leftrightarrow (3p+1)(2p+3)<0$, además $3p+1<0 \Leftrightarrow p<\frac{-1}{3}$ y $2p+3<0 \Leftrightarrow p<\frac{-3}{2}$. Al construir una tabla de signos se tiene que

$-\infty$ $\frac{-3}{2}$ $\frac{-1}{3}$ ∞

$2p+3$	- ○	+	+
$3p+1$	-	- ○	+
$6p^2+11p+3$	+	-	+

Por tanto $S = \left]\frac{-3}{2},\frac{-1}{2}\right[$.

f) $S = \left]-\infty, -1\right[\cup \left]2, \infty\right[$

g) Dado que $a < 0$ y $\Delta = (1)^2 - 4(-1)(-3) = 1 - 12 = -11$, de la tabla para estos casos se tiene que $S = \mathbb{R}$.

Otra forma de analiza esta situación es el considerar que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 3 > x \Leftrightarrow x^2 - x + 3 > 0 \Leftrightarrow -\left(x^2 - x + 3\right) < 0 \Leftrightarrow -x^2 + x - 3 < 0$$

Obteniéndose el mismo conjunto solución.

h) $S = \left]-1, 2\right[$

i) Dado que $3n(2n+1) - 4(2n+1) > 0 \Leftrightarrow (2n+1)(3n-4) > 0$, además

$2n + 1 > 0 \Leftrightarrow n > \frac{-1}{2}$ y $3n - 4 > 0 \Leftrightarrow n > \frac{4}{3}$.

Al construir una tabla de signos se tiene que

	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$		$\frac{4}{3}$	∞
$2n+1$	-	○	+		+
$3n-4$	-		-	○	+
$(2n+1)(3n-4)$	+		-		+

Por tanto $S = \left]-\infty, \frac{-1}{2}\right[\cup \left]\frac{4}{3}, \infty\right[$.

j) $S=\mathbb{R}$

k) $3x\left(x^2+4\left(x+1\right)\right)\geq 7x^2\left(x+2\right)$

$$
\begin{aligned}
&3x\left(x^2+4\left(x+1\right)\right)\geq 7x^2\left(x+2\right)\\
\Leftrightarrow\ &3x\left(x^2+4x+4\right)\geq 7x^2\left(x+2\right)\\
\Leftrightarrow\ &3x^3+12x^2+12x\geq 7x^3+14x^2\\
\Leftrightarrow\ &0\geq 7x^3+14x^2-3x^3-12x^2-12x\\
\Leftrightarrow\ &0\geq 4x^3+2x^2-12x\\
\Leftrightarrow\ &0\geq -2x\left(2x-3\right)\left(x+2\right)\\
\Leftrightarrow\ &0\leq 2x\left(2x-3\right)\left(x+2\right)
\end{aligned}
$$

Al construir la tabla de signos se tiene que

	$-\infty$		-2		0		$\frac{3}{2}$		∞
$2x$		-	●	+		+		+	
$2x-3$		-		-	●	+		+	
$x-2$		-		-		-	●	+	
$2x\left(2x-3\right)\left(x-2\right)$		-		+		-		+	

Por tanto $S=\left]-\infty,-2\right]\cup\left[0,\dfrac{3}{2}\right]$.

l) $S=\left]-\infty,\dfrac{-2}{5}\right[\cup\left]1,\dfrac{4}{3}\right[$

m) Resolver dicha ecuación es equivalente a resolver $(3a+1)(4a+3)(a-1)>0$.

Luego $3a+1>0 \Leftrightarrow a>\frac{-1}{3}$, $4a+3>0 \Leftrightarrow a>\frac{-3}{4}$ y $a-1>0 \Leftrightarrow a>1$. Al construir la tabla de signos se tiene que

$-\infty$ $\frac{-3}{4}$ $\frac{-1}{3}$ 1 ∞

$4a+3$	- ○	+	+	+
$3a+1$	-	- ○	+	+
$a-1$	-	-	- ○	+
$(3a+1)(4a+3)(a-1)$	-	+	-	+

Como se debe determinar los valores para los cuales $(3a+1)(4a+3)(a-1)>0$, esto se satisface para $S=\left]\frac{-3}{4},\frac{-1}{3}\right[\cup\left]1,\infty\right[$.

n) $S=\left]1,\infty\right[$

o) Dado que $x^4+3x^3-6x-4<0 \Leftrightarrow (x+1)(x+2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})<0$

Luego $x+1<0 \Leftrightarrow x<-1$, $x+2<0 \Leftrightarrow x<-2$, $x-\sqrt{2}<0 \Leftrightarrow x<\sqrt{2}$ y $x+\sqrt{2}<0 \Leftrightarrow x<-\sqrt{2}$.

Al construir la tabla de signos se tiene que

$-\infty$ -2 $-\sqrt{2}$ -1 $\sqrt{2}$ ∞

$x+2$	- ○	+	+	+	+
$x+\sqrt{2}$	-	- ○	+	+	+
$x+1$	-	-	- ○	+	+
$x-\sqrt{2}$	-	-	-	- ○	+
$(x+1)(x+2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$	+	-	+	-	+

Por tanto $S=\left]-2,-\sqrt{2}\right[\cup\left]-1,\sqrt{2}\right[$.

p) $S = \left]0,\infty\right[$

q) Dado que $x^5 + 6x^4 + 9x^3 - 4x^2 - 12x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+2)^2(x+3) \geq 0$.

Luego $x > 0$, $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1, (x+2)^2 \geq 0$ y $x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$.

Al construir la tabla de signos se tiene que

	$-\infty$		-3		-2		0		1		∞
$x+3$		-	●	+		+		+		+	
$(x+2)^2$		+		+	●	+		+		+	
x		-		-		-	●	+		+	
$x-1$		-		-		-		-	●	+	
$x(x-1)(x+2)^2(x+3)$		-		+		+		-		+	

Así $S = [-3,0] \cup \left[1,\infty\right[$.

Tenga presente que en $x = 2$ la expresión $x^5 + 6x^4 + 9x^3 - 4x^2 - 12x$ es igual cero.

r) $S = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$

s) Dado que $2x^3+9x^2-38x-21>0 \Leftrightarrow (x-3)(x+7)(2x+1)>0$, conociendo que $x-3>0 \Leftrightarrow x>3$, $x+7>0 \Leftrightarrow x>-7$ y $2x+1>0 \Leftrightarrow x>\frac{-1}{2}$.

Al construir la tabla de signos se tiene que

$-\infty$ -7 $\frac{-1}{2}$ 3 ∞

$x+7$	- ○	+	+	+
$2x+1$	-	- ○	+	+
$x-3$	-	-	- ○	+
$2x^3+9x^2-38x-21$	-	+	-	+

Como se debe determinar los valores para los cuales $2x^3+9x^2-38x-21>0$, esto se satisface para $S=\left]-7,\frac{-1}{2}\right[\cup\left]3,\infty\right[$.

t) $S=\left]-\infty,5\right]$

u) Dado que $x^4-5x^3+4x^2+3x+9\geq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2(x^2+x+1)\geq 0$.

Luego $(x-3)^2\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ y $x^2+x+1>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Al construir la tabla de signos se tiene que

$-\infty$ 3 ∞

$(x-3)^2$	+ ●	+
x^2+x+1	+	+
$x^4-5x^3+4x^2+3x+9$	+	+

Así $S=\mathbb{R}$.

v) $S = \left]-\infty,-2\right[\cup \left]-1,2\right[\cup \left]3,\infty\right[$

w) $x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)(x-2)(x+1)(x+2) \leq 0$.

Además se tiene que $x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$, $x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$, $x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$, $x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ y $x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$. Al construir la tabla de signos se tiene que

	$-\infty$	-2	-1	1	2	3	∞
$x+2$	- ●	+	+	+	+	+	
$x+1$	-	- ●	+	+	+	+	
$x-1$	-	-	- ●	+	+	+	
$x-2$	-	-	-	- ●	+	+	
$x-3$	-	-	-	-	- ●	+	
$x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12$	-	+	-	+	-	+	

Así $S = \left]-\infty,-2\right] \cup [-1,1] \cup [2,3]$.

Ejercicio 6

a) Como los costos obedecen a $C = 30x + 250\,000$. Se deberá analizar o resolver

$$\begin{aligned} & 30x + 250\,000 < 269\,800 \\ \Leftrightarrow\ & 30x < 269\,800 - 250\,000 \\ \Leftrightarrow\ & 30x < 19\,800 \\ \Leftrightarrow\ & x < \frac{19\,800}{30} \\ \Leftrightarrow\ & x < 660 \end{aligned}$$

Por tanto, para que los costos sean inferiores a los \$269 800 se deberá producir menos de 660 unidades.

b) Los ingresos obedecen a la $I=x(75-0,0005x)$. Además existen ingresos si estos son mayores que cero, por tanto se deberá resolver $x(75-0,0005x)>0$. Como $75-0,0005x>0 \Leftrightarrow 75>0,0005x \Leftrightarrow \dfrac{75}{0,0005}>x \Leftrightarrow 150\,000>x$, también debe considerarse que por el contexto $x>0$. Al construir una tabla de signos se tiene

	0		150 000		∞
x	○	+		+	
$75-0,0005x$		+	○	-	
$x(75-0,0005x)$		+		-	

Por tanto, para tener ingresos se deberá vender de 1 a 149 999 unidades.

c) Existen utilidades cuando $I-C>0$.

Así $I-C>0 \Leftrightarrow \left[x(75-0,0005x)\right]-(30x+250\,000)>0$.

Al resolver se tiene que

$$\begin{aligned}
&\left[x(75-0,0005x)\right]-(30x+250\,000)>0\\
&\Leftrightarrow 75x-0,0005x^2-30x-250\,000>0\\
&\Leftrightarrow 0>0,0005x^2-45x+250\,000\\
&\Leftrightarrow 0>0,0005\left(x^2-90\,000x+500\,000\,000\right)
\end{aligned}$$

Además, los ceros de $x^2-90\,000x+500\,000\,000$ son aproximadamente $x_1=84051,24$ y $x_2=5948,75$. Así $x^2-90\,000x+500\,000\,000\approx(x-84051,24)(x-5948,75)$. Al construir una tabla de signos se tiene que

	0		$5948,75$		$84051,24$		∞
$0,0005$		+		+		+	
$x-5948,75$		-	○	+		+	
$x-84051,24$		-		-	○	+	
$0,0005\left(x^2-90\,000x+500\,000\,000\right)$		+		-		+	

Por tanto, para que exista utilidades se deberá producir y vender entre 5 949 y 84 051 unidades.

Ejercicio 7

De acuerdo con lo solicitado se deberá resolver $x(98-2x)^2>0$. Nótese que $(98-2x)^2\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Así al construir la tabla de signos se tiene que

	0		49		∞
x	○	+		+	
$(98-2x)^2$		+	○	+	
$x(75-0,0005x)$		+		+	

En este caso la solución de la inecuación corresponde a $\mathbb{R}-\{0,49\}$ por que en dichos valores el volumen da cero. No obstante, como $98-2x$ es la medida del lado de la base, este no debe ser negativo, lo cual se da sí $x>49$. Por tanto la altura deberá tomar valores en $]0,49[$ es decir mayor de 0 cm pero menor que 49 cm.

Ejercicios de la sección 3.3

Ejercicio 1

a) Como el dominio de la variable corresponde a $\mathbb{R}-\{2\}$. Nótese que $x+1\leq 0 \Leftrightarrow x\leq -1$ y que $x-2<0 \Leftrightarrow x<2$ (recuerde que no se analiza la igualdad en el denominador dado que este no debe ser cero).
Al hacer el análisis en una tabla de signos se tiene

	$-\infty$		-1		2		∞
$x+1$		-	●	+		+	
$x-2$		-		-	○	+	
$\frac{x+1}{x-2}$		+		-		+	

Como se deben determinar los valores para los cuales $\frac{x+1}{x-2}$ es menor o igual que cero, de acuerdo con la tabla esto se satisface en $\left[-1,2\right[$.

Así se concluye que $S=\left[-1,2\right[$.

b) $S=\left]2,\frac{13}{4}\right]$

c) Como $\frac{x+3-2(x-2)}{x+4}<0 \Rightarrow \frac{x+3-2x+4}{x+4}<0 \Rightarrow \frac{-x+7}{x+4}<0$. El dominio de la variable corresponde a $\mathbb{R}-\{-4\}$.

Además $-x+7<0 \Leftrightarrow -x<-7 \Leftrightarrow x>\frac{-7}{-1} \Leftrightarrow x>7$ y $x+4<0 \Leftrightarrow x<-4$ Al hacer el análisis en una tabla de signos se tiene

	$-\infty$	-4		7	∞
$x+4$	-	○	+		+
$-x+7$	-		-	○	+
$\dfrac{-x+7}{x+4}$	+		-		+

Se concluye que $S=\left]-4,7\right[$.

d) $S=\left]-\infty,-1\right]\cup\left]1,\infty\right[$

e) El dominio de la variable corresponde a $\mathbb{R}-\{-4,2\}$. Además

$$\frac{3}{x+4}\le\frac{11}{x-2}$$

$$\Rightarrow\frac{3}{x+4}-\frac{11}{x-2}\le 0$$

$$\Rightarrow\frac{3(x-2)-11(x+4)}{(x+4)(x-2)}\le 0$$

$$\Rightarrow\frac{3x-6-11x-44}{(x+4)(x-2)}\le 0$$

$$\Rightarrow\frac{-8x-50}{(x+4)(x-2)}\le 0$$

$$\Rightarrow\frac{-8x-50}{(x+4)(x-2)}\le 0$$

$$\Rightarrow\frac{-2(4x-25)}{(x+4)(x-2)}\le 0$$

Luego $4x+25\le 0\Leftrightarrow x\le\frac{-25}{4}$, $x+4<0\Leftrightarrow x<-4$ y $x-2<0\Leftrightarrow x<2$. Al construir la tabla de signos se tiene que (recuerde que se debe incluir el -2 del numerador)

$-\infty$ $\quad \frac{-25}{4}$ $\quad -4$ $\quad 2$ $\quad \infty$

-2	- ●	-	-	-
$4x+25$	-	+ ○	+	+
$x+4$	-	-	+ ○	+
$x-4$	-	-	-	+
$\frac{-2(4x-25)}{(x+4)(x-2)}$	+	-	+	-

Así $S=\left[\frac{-25}{4},-4\right[\cup\left]2,\infty\right[$.

f) $S=\left]-3,10\right]$

g) El dominio de la variable corresponde a $\mathbb{R}-\{-4,-3\}$.

$$\frac{2x^2+5x-3}{(3+x)(4+x)} \leq \frac{-2}{3+x}+\frac{x}{4+x}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2+5x-3}{(3+x)(4+x)} \leq \frac{-2(4+x)+x(3+x)}{(3+x)(4+x)}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2+5x-3}{(3+x)(4+x)} \leq \frac{-8-2x+3x+x^2}{(3+x)(4+x)}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2+5x-3}{(3+x)(4+x)} - \frac{-8-2x+3x+x^2}{(3+x)(4+x)} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2+5x-3+8-x-x^2}{(3+x)(4+x)} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+4x+5}{(3+x)(4+x)} \leq 0$$

Nótese que $\forall x \in \mathbb{R}, x^2+5 > -4x \Rightarrow x^2+4x+5>0$, $3+x<0 \Leftrightarrow x<-3$ y $4+x<0 \Leftrightarrow x<-4$.

Así al hacer el análisis en una tabla de signos

	$-\infty$	-4	-3	∞
$3+x$	-	+ ○		+
$4+x$	-	-	○	+
x^2+4x+5	+	+		+
$\frac{x^2+4x+5}{(3+x)(4+x)}$	+	-		+

Se concluye que $S =]-4,-3[$.

h) $S = [-2,0[\cup [2,\infty[$

i) El dominio de la variable corresponde a $\mathbb{R}-\{-7\}$.

$$\frac{x^6-1}{x+7}>0$$
$$\Rightarrow \frac{(x^3-1)(x^3+1)}{x+7}>0$$
$$\Rightarrow \frac{(x-1)(x^2+x-1)(x+1)(x^2-x+1)}{x+7}>0$$

Como $\forall x\in\mathbb{R}, x^2+1>x \Rightarrow x^2-x+1>0$, $\forall x\in\mathbb{R}, x^2+1>-x \Rightarrow x^2+x+1>0$ (Estas dos expresiones podrían no colocarse en la tabla dado que no afectan el resultado final).

Luego $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$, $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$ y $x+7>0 \Leftrightarrow x>-7$. Así al hacer el análisis en una tabla de signos se tiene

	$-\infty$		-7		-1		1		∞
$x+7$		-	○	+		+		+	
$x+1$		-		-	○	+		+	
$x-1$		-		-		-	○	+	
x^2+x+1		+		+		+		+	
x^2-x+1		+		+		+		+	
$\frac{x^6-1}{x+7}$		-		+		-		+	

Se concluye que $S=\left]-7,-1\right[\cup\left]1,\infty\right[$.

j) $S=\left]-1,0\right]\cup\left[2,3\right[$

k) El dominio de la variable corresponde a $\mathbb{R}-\{-3,3\}$. Además

$$\frac{x-2}{x-3}-\frac{x+2}{x+3}\geq 1-\frac{x-5}{x+3}$$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{x-3}-\frac{x+2}{x+3}-1+\frac{x-5}{x+3}\geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)(x+3)-(x+2)(x-3)-(x-3)(x+3)+(x-5)(x-3)}{(x-3)(x+3)}\geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{-6x+24}{(x-3)(x+3)}\geq 0$$

Nótese que $-6x+24\geq 0 \Leftrightarrow 24\geq 6x \Leftrightarrow \frac{24}{6}\geq x \Leftrightarrow 4\geq x$, $x-3>0 \Leftrightarrow x>3$, $x+3>0 \Leftrightarrow x>-3$. Así al hacer el análisis en una tabla de signos se tiene

$-\infty$	-3	3	4	∞
$x+3$	- ○	+	+	+
$x-3$	-	- ○	+	+
$-6x+24$	+	+	+ ●	-
$\frac{-6x+24}{(x-3)(x+3)}$	+	-	+	-

Se concluye que $S=\left]-\infty,-3\right[\cup\left]3,4\right]$.

l) $S=\left]-5,-4\right]\cup\left[-2,1\right[\cup\left[3,\infty\right[$

Ejercicio 2

a) Dado que $|4x-7| = \begin{cases} 4x-7 & \text{si } x \geq \frac{7}{4} \\ -(4x-7) & \text{si } x < \frac{7}{4} \end{cases}$, entonces se considerará dos casos.

Caso 1. Si $x \geq \frac{7}{4}$.

$$\begin{aligned} &|4x-7| = 10 \\ \Leftrightarrow\ & 4x-7 = 10 \\ \Leftrightarrow\ & 4x = 10+7 \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{17}{4} \end{aligned}$$

Como $\frac{17}{4} \geq \frac{7}{4}$, se tiene que $x = \frac{17}{4}$ es solución.

Caso 2. Si $x < \frac{7}{4}$.

$$\begin{aligned} &|4x-7| = 10 \\ \Leftrightarrow\ & -(4x-7) = 10 \\ \Leftrightarrow\ & -4x+7 = 10 \\ \Leftrightarrow\ & -4x = 10-7 \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{-3}{4} \end{aligned}$$

Como $\frac{-3}{4} < \frac{7}{4}$, se tiene que $x = \frac{-3}{4}$ es solución.

Por tanto $S = \left\{ \frac{-3}{4}, \frac{17}{4} \right\}$.

b) $S = \left\{ \frac{4}{3}, 6 \right\}$

c) Dado que $-2\left|\frac{x}{2}+3\right|=-6 \Leftrightarrow \left|\frac{x}{2}+3\right|=\frac{-6}{-2} \Leftrightarrow \left|\frac{x}{2}+3\right|=3$

$$\left|\frac{x}{2}+3\right|=3 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2}+3=3 \Leftrightarrow \frac{x}{2}=3-3 \Leftrightarrow x=0\cdot 2 \Leftrightarrow x=0 \\ \frac{x}{2}+3=-3 \Leftrightarrow \frac{x}{2}=-3-3 \Leftrightarrow \frac{x}{2}=-6 \Leftrightarrow x=-12 \end{cases}$$

Así $S=\{-12,0\}$.

d) $S=\{0,4\}$

e) Dado que $10=|9x-7| \Leftrightarrow \begin{cases} 9x-7=10 \Leftrightarrow 9x=10+7 \Leftrightarrow x=\frac{17}{9} \\ 9x-7=-10 \Leftrightarrow 9x=-10+7 \Leftrightarrow x=\frac{-3}{9}=\frac{-1}{3} \end{cases}$

Así $S=\left\{\frac{-1}{3},\frac{17}{9}\right\}$.

f) $S=\{-9,-5\}$

g) Dado que $|x|=\begin{cases} x & \text{si } x\geq 0 \\ -(x) & \text{si } x<0 \end{cases}$, entonces se considerará dos casos.

Caso 1. Si $x\geq 0$.

$$\frac{2x-5}{6}+\frac{|x|}{2}+1=4$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x}{6}-\frac{5}{6}+\frac{x}{2}+1=4$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x}{6}+\frac{x}{2}=4+\frac{5}{6}-1$$
$$\Leftrightarrow \frac{5x}{6}=\frac{23}{6}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{23}{5}$$

Como $\frac{23}{5}$ es mayor o igual que 0, entonces $x=\frac{23}{5}$ es solución.

Caso 2. Si $x<0$.

$$\frac{2x-5}{6}+\frac{|x|}{2}+1=4$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x}{6}-\frac{5}{6}+\frac{-x}{2}+1=4$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x}{6}+\frac{-x}{2}=4+\frac{5}{6}-1$$
$$\Leftrightarrow \frac{-x}{6}=\frac{23}{6}$$
$$\Leftrightarrow x=-23$$

Como $-23<0$, entonces $x=-23$ es solución.

Por tanto $S=\left\{-23,\frac{23}{5}\right\}$.

h) $S=\left\{\frac{-4}{3},2\right\}$

i) Dado que $|4x+1| = \begin{cases} 4x+1 & \text{si } x \geq \frac{-1}{4} \\ -(4x+1) & \text{si } x < \frac{-1}{4} \end{cases}$, entonces se considerará dos casos.

Además, como $|4x+1|+2x-3=7x+1 \Leftrightarrow |4x+1|=7x+1-2x+3 \Leftrightarrow |4x+1|=5x+4$, se deberá considerar que $5x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{-4}{5}$. Al analizar los casos se tiene que

Caso 1. Si $x \geq \frac{-1}{4}$.

$$\begin{aligned} & |4x+1|+2x-3=7x+1 \\ \Leftrightarrow\ & 4x+1+2x-3=7x+1 \\ \Leftrightarrow\ & 6x-2=7x+1 \\ \Leftrightarrow\ & -2-1=7x-6x \\ \Leftrightarrow\ & -3=x \end{aligned}$$

Pero -3 no es mayor o igual que $\frac{-1}{4}$, entonces $x=-3$ no es solución. Nótese que dicho valor tampoco satisface la condición de $x \geq \frac{-4}{5}$.

Caso 2. Si $x < \frac{-1}{4}$.

$$\begin{aligned} & |4x+1|+2x-3=7x+1 \\ \Leftrightarrow\ & -(4x+1)+2x-3=7x+1 \\ \Leftrightarrow\ & -4x-1+2x-3=7x+1 \\ \Leftrightarrow\ & -2x-4=7x+1 \\ \Leftrightarrow\ & -4-1=7x+2x \\ \Leftrightarrow\ & \frac{-5}{9}=x \end{aligned}$$

Pero $\frac{-5}{9} < \frac{-1}{4}$, entonces $x=\frac{-5}{9}$ si es solución. Note que este valor además satisface la condición $x \geq \frac{-4}{5}$.

Por tanto $S=\left\{\frac{-5}{9}\right\}$.

j) $S=\left\{\dfrac{-5}{9}\right\}$

k) Note que $|x+1|=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\geq -1 \\ -(x+1) & \text{si } x<-1 \end{cases}$ y $|3x+1|=\begin{cases} 3x+1 & \text{si } x\geq \dfrac{-1}{3} \\ -(3x+1) & \text{si } x<\dfrac{-1}{3} \end{cases}$ entonces se considerará tres casos.

Caso 1. Si $x<-1$, entonces $|x+1|=-(x+1)$ y $|3x+1|=-(3x+1)$

$$\begin{aligned}
& |x+1|-|3x+1|=6 \\
\Leftrightarrow\ & -(x+1)--(3x+1)=6 \\
\Leftrightarrow\ & -x-1+3x+1=6 \\
\Leftrightarrow\ & 2x=6 \\
\Leftrightarrow\ & 2x=6 \\
\Leftrightarrow\ & x=\frac{6}{2} \\
\Leftrightarrow\ & x=3
\end{aligned}$$

Como 3 no es menor que -1, entonces $x=-2$ no es una solución.

Caso 2. Si $-1\leq x<\dfrac{-1}{3}$, entonces $|x+1|=x+1$ y $|3x+1|=-(3x+1)$

$$\begin{aligned}
& |x+1|-|3x+1|=6 \\
\Leftrightarrow\ & (x+1)--(3x+1)=6 \\
\Leftrightarrow\ & x+1+3x+1=6 \\
\Leftrightarrow\ & 4x+2=6 \\
\Leftrightarrow\ & 4x=6-2 \\
\Leftrightarrow\ & x=\frac{4}{4} \\
\Leftrightarrow\ & x=1
\end{aligned}$$

Como 1 no pertenece a $-1\leq x<\dfrac{-1}{3}$, entonces $x=1$ no es una solución.

Caso 3. Si $x \geq \frac{-1}{3}$, entonces $|x+1| = x+1$ y $|3x+1| = 3x+1$

$$
\begin{aligned}
& |x+1|+|3x+1|=6 \\
\Leftrightarrow\ & x+1-(3x+1)=6 \\
\Leftrightarrow\ & x+1-3x-1=6 \\
\Leftrightarrow\ & -2x=6 \\
\Leftrightarrow\ & x=\frac{6}{-2} \\
\Leftrightarrow\ & x=-3
\end{aligned}
$$

Como -3 no es mayor o igual que $\frac{-1}{3}$, entonces $x=-3$ no es una solución.

Por tanto $S=\{\ \}$.

l) $S=\left\{\frac{-1}{4},1\right\}$

m) Note que $|3n-5| = \begin{cases} 3n-5 & \text{si } n \geq \frac{5}{3} \\ -(3n-5) & \text{si } n < \frac{5}{3} \end{cases}$ y $|2n+1| = \begin{cases} 2n+1 & \text{si } n \geq \frac{-1}{2} \\ -(2n+1) & \text{si } n < \frac{-1}{2} \end{cases}$ entonces se considerará tres casos.

Caso 1. Si $x < \frac{-1}{2}$, entonces $|3n-5| = -(3n-5)$ y $|2n+1| = -(2n+1)$

$$
\begin{aligned}
& |3n-5|+|2n+1|=3n \\
\Leftrightarrow\ & -(3n-5)+-(2n+1)=3n \\
\Leftrightarrow\ & -3n+5-2n-1=3n \\
\Leftrightarrow\ & 5-1=3n+3n+2n \\
\Leftrightarrow\ & 4=8n \\
\Leftrightarrow\ & \frac{4}{8}=n \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}=n
\end{aligned}
$$

Como $\frac{1}{2}$ no es menor que $\frac{-1}{2}$, entonces $n=\frac{1}{2}$ no es una solución.

Caso 2. Si $\frac{-1}{2} \leq n < \frac{5}{3}$, entonces $|3n-5| = -(3n-5)$ y $|2n+1| = 2n+1$

$$
\begin{aligned}
&|3n-5|+|2n+1|=3n \\
&\Leftrightarrow -(3n-5)+(2n+1)=3n \\
&\Leftrightarrow -3n+5+2n+1=3n \\
&\Leftrightarrow 6=3n+3n-2n \\
&\Leftrightarrow 6=4n \\
&\Leftrightarrow \frac{6}{4}=n \\
&\Leftrightarrow \frac{3}{2}=n
\end{aligned}
$$

Dado que $\frac{-1}{2} \leq \frac{3}{2} < \frac{5}{3}$ entonces $n=\frac{3}{2}$ es una solución.

Caso 3. Si $n \geq \frac{5}{3}$, entonces $|3n-5| = 3n-5$ y $|2n+1| = 2n+1$

$$
\begin{aligned}
&|3n-5|+|2n+1|=3n \\
&\Leftrightarrow (3n-5)+(2n+1)=3n \\
&\Leftrightarrow 3n-5+2n+1=3n \\
&\Leftrightarrow 3n+2n-3n=5-1 \\
&\Leftrightarrow 2n=4 \\
&\Leftrightarrow n=\frac{4}{2} \\
&\Leftrightarrow n=2
\end{aligned}
$$

Como 2 es mayor o igual que $\frac{5}{3}$, entonces $n=2$ es una solución.

Por tanto $S=\left\{\frac{3}{2},\frac{5}{3}\right\}$.

n) $S=\{0\}$

Ejercicio 3

a) $\left|7m+1+2\left(m-4\right)\right|<11$

$$
\begin{aligned}
&\left|7m+1+2\left(m-4\right)\right|<11\\
\Leftrightarrow\ &\left|7m+1+2m-8\right|<11\\
\Leftrightarrow\ &\left|9m-7\right|<11\\
\Leftrightarrow\ &-11<9m-7<11\\
\Leftrightarrow\ &-11+7<9m<11+7\\
\Leftrightarrow\ &-4<9m<18\\
\Leftrightarrow\ &\frac{-4}{9}<m<\frac{18}{9}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{-4}{9}<m<2
\end{aligned}
$$

Así el conjunto solución corresponde a $S=\left\{m\in\mathbb{R}\,/\,\frac{-4}{9}<x<2\right\}=\left]\frac{-4}{9},2\right[$.

b) $S=\left\{\frac{-11}{3}\right\}$

c) $\left|4\left(3x+1\right)-7\left(x-3\right)\right|\leq 0,75$

$$
\begin{aligned}
&\left|4\left(3x+1\right)-7\left(x-3\right)\right|\leq 0,75\\
\Leftrightarrow\ &\left|12x+4-7x+21\right|\leq 0,75\\
\Leftrightarrow\ &\left|5x+25\right|\leq\frac{3}{4}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{-3}{4}\leq 5x+25\leq\frac{3}{4}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{-3}{4}-25\leq 5x\leq\frac{3}{4}-25\\
\Leftrightarrow\ &\frac{-103}{4}\leq 5x\leq\frac{-97}{4}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{-103}{20}\leq x\leq\frac{-97}{20}
\end{aligned}
$$

Así el conjunto solución corresponde a

$$S=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,\frac{-103}{20}\leq x\leq\frac{-97}{20}\right\}=\left[\frac{-103}{20},\frac{-97}{20}\right].$$

d) $S=\{x\in\mathbb{R}\,/\,-1\leq x\leq 0\}=[-1,0]$

e) $\left|\frac{x}{3}\right|\geq\sqrt{2}$

Dado que se tiene la condición $|x|\geq k\Leftrightarrow x\geq k$ ó $x\leq -k$. Se deben considerar dos casos

Caso 1: $\frac{x}{3}\geq\sqrt{2}\Leftrightarrow x\geq 3\sqrt{2}$, que corresponde a $x\in\left[3\sqrt{2},\infty\right[$

Caso 2: $\frac{x}{3}\leq-\sqrt{2}\Leftrightarrow x\leq-3\sqrt{2}$, que corresponde a $x\in\left]-\infty,-3\sqrt{2}\right]$

Luego de resolver cada una de las desigualdades por aparte, el conjunto solución de la desigualdad original será la unión de ambas soluciones. Por tanto, se tiene que el conjunto solución de $\left|\frac{x}{3}\right|\geq\sqrt{2}$ corresponde a

$S=\left]-\infty,-3\sqrt{2}\right]\cup\left[3\sqrt{2},\infty\right[$.

f) $S=\left]-\infty,\frac{9}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},\infty\right[=\mathbb{R}$

g) $|4x-7|-10\leq -6$

Dado que $|4-7x|-10\leq -6 \Leftrightarrow |4-7x|\leq -6+10|4-7x|-10\leq -6 \Leftrightarrow |4-7x|\leq 4$ se tiene que

$$|4-7x|\leq 4 \Leftrightarrow -4\leq 4-7x\leq 4 \Leftrightarrow -4-4\leq -7x\leq 4-4 \Leftrightarrow -8\leq -7x\leq 0 \Leftrightarrow \frac{-8}{-7}\geq x\geq \frac{0}{-7} \Leftrightarrow \frac{8}{7}\geq x\geq 0$$

(Recuerde que al dividir en la desigualdad por -7 se debe invertir el sentido de la desigualdad)

Así $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,0\leq x\leq \frac{8}{7}\right\}=\left[0,\frac{8}{7}\right]$.

h) $S=\left]-\infty,14\right[\cup\left]32,\infty\right[$

i) $4-\sqrt{(1-x)^2}>0$

Dado que $-4+\sqrt{(1-x)^2}>0 \Leftrightarrow \sqrt{(1-x)^2}>4 \Leftrightarrow |1-x|>4$, así se tiene la condición $|x|\geq k \Leftrightarrow x\geq k$ ó $x\leq -k$, por lo que se deben considerar dos casos

Caso 1: $1-x>4 \Leftrightarrow 1-4>x \Leftrightarrow -3>x$, que corresponde a $x\in\left]-\infty,-3\right[$

Caso 2: $1-x<-4 \Leftrightarrow 1+4<x \Leftrightarrow 5<x$, que corresponde a $x\in\left]5,\infty\right[$

Por tanto, se tiene que el conjunto solución de $-4+\sqrt{(1-x)^2}>0$ corresponde a $S=\left]-\infty,-3\right[\cup\left]5,\infty\right[$.

j) $S=\left]-\infty,0\right]\cup\left]0,\frac{40}{9}\right[=\left]-\infty,\frac{40}{9}\right[=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x<\frac{40}{9}\right\}$

Ejercicio 4

Como $y<0$ entonces $|y|=-y$, además $|x-2|=\begin{cases} x-2, & si \quad x-2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 2 \\ -(x-2), & si \quad x-2<0 \Leftrightarrow x<2 \end{cases}$

Como $x<0$, entonces $|x-2|=-(x-2)$, por tanto

$$|y|-|x-2|-x=-y-[-(x-2)]-x=-y+x-2-x=-y-2=-2-y$$

Verificándose así lo solicitado.

Ejercicio 5

Si $x<0$ verifique que $||x|-x|=-2x$.

SOLUCIÓN

Como $x<0$ entonces se tiene que $|x|=-x$

Por tanto

$$||x|-x|=|-x-x|=|-2x|=|-2||x|=2|x|=2\cdot -x=-2x$$

Probándose así lo solicitado.

Ejercicio 6

Si $a\geq b$ verifique que $3a-2|a-b|=a+2b$.

SOLUCIÓN

Como $a\geq b$ entonces se tiene que $|a-b|=a-b$

Por tanto

$$3a-2|a-b|=3a-2(a-b)=3a-2a+2b=a+2b$$

Probándose así lo solicitado.

Ejercicio 7

Si $y>0$ y $x>1$ verifique que se cumple que $|xy-y|+y=xy$.

SOLUCIÓN

Como $y>0$ entonces $|y|=y$, además

$$|xy-y|+y=|y(x-1)|+y$$

Pero $|y(x-1)|=|y||x-1|$, donde $|x-1|=\begin{cases} x-1, & si \quad x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1 \\ -(x-1), & si \quad x-1<0 \Leftrightarrow x<1 \end{cases}$, como $x>1$

$$|y(x-1)|+y=|y||x-1|+y=y(x-1)+y=yx-y+y=xy$$

Verificándose así lo solicitado.

Ejercicios de autoevaluación

1) De acuerdo con los datos se debe resolver $34500x+10000>355000$, lo cual se satisface si

$$\begin{aligned}
&34500x+10000>355000\\
\Leftrightarrow\ &34500x>355000-10000\\
\Leftrightarrow\ &34500x>345000\\
\Leftrightarrow\ &x>\frac{345000}{34500}\\
\Leftrightarrow\ &x>10
\end{aligned}$$

Esto permite concluir que el productor deberá enviar más de 10 quintales de papas para que las ganancias sean mayores a 355 000 colones.

2) Dado que

$$\begin{aligned}
&\frac{7x+2}{4}-1<\frac{2x+5}{2}+x\\
\Leftrightarrow\ &\frac{7x+2-4}{4}<\frac{2x+5+2x}{2}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{7x-2}{4}<\frac{4x+5}{2}\\
\Leftrightarrow\ &2(7x-2)<4(4x+5)\\
\Leftrightarrow\ &14x-4<16x+20\\
\Leftrightarrow\ &-4-20<16x-14x\\
\Leftrightarrow\ &-24<2x\\
\Leftrightarrow\ &\frac{-24}{2}<x\\
\Leftrightarrow\ &-12<x
\end{aligned}$$

Como las soluciones debe estar en $\mathbb{Z}$, $S=\{-11,-10,-9,-8,-7,\ldots\}$.

3) Como $a = 3 > 0$ dicha inecuación no tiene soluciones si $\Delta \leq 0$.

Como $\Delta = (4)^2 - 4(3)(k) \Rightarrow \Delta = 16 - 12k$. Al resolver $\Delta \leq 0$ se obtiene que

$$\begin{aligned} & \Delta \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & 16 - 12k \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & 16 \leq 12k \\ \Leftrightarrow\ & \frac{16}{12} \leq k \\ \Leftrightarrow\ & \frac{4}{3} \leq k \end{aligned}$$

Por tanto para que dicha inecuación no tenga solución se debe satisfacer que

$k \in \left[\frac{4}{3}, \infty\right[$.

4) Dado que $3x^2 + 5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Como $b < 0$, $x + b < 0 \Leftrightarrow x < -b$ y Como $a > 0$, $a + x < 0 \Leftrightarrow x < -a$.

Al hacer el análisis en una tabla de signos se tiene

	$-\infty$		$-a$		$-b$		∞
b		-		-		-	
$a + x$		-	○	+		+	
$x + b$		-		-	○	+	
$3x^2 + 5$		+		+		+	
$\frac{b(a+x)(x+b)}{3x^2+5}$		-		+		-	

Por tanto se tiene que $S = \left]-a, -b\right[$.

5)

$$
\begin{aligned}
& (a-b)^2 \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & a^2-2ab+b^2 \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & a^2+b^2 \geq 2ab \\
\Leftrightarrow\ & a^2+a^2+b^2+b^2 \geq a^2+2ab+b^2 \\
\Leftrightarrow\ & 2a^2+2b^2 \geq (a+b)^2 \\
\Leftrightarrow\ & 2\left(a^2+b^2\right) \geq (a+b)^2 \\
\Leftrightarrow\ & a^2+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right) \geq \frac{1}{2}\cdot\frac{(a+b)^2}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{(a+b)^2}{4} \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}} \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}
\end{aligned}
$$

Como $a,b \in \mathbb{R}^+$, entonces $a+b \in \mathbb{R}^+$, por tanto $\sqrt{(a+b)^2} = a+b$.

Demostrándose lo solicitado.

6) Dado que $|a| \geq 0$ para toda *a*, se debe analizar únicamente cuando $2x+3<0$. Así

$$2x+3<0 \Leftrightarrow 2x<-3 \Leftrightarrow x<\frac{-3}{2}.$$

Por tanto se tiene que $S = \left]-\infty, \frac{-3}{2}\right[$.

7) Note que

$$
\begin{aligned}
& |h-65|\leq 10 \\
\Leftrightarrow & -10\leq h-65\leq 10 \\
\Leftrightarrow & -10+65\leq h\leq 10+65 \\
\Leftrightarrow & 55\leq h\leq 75
\end{aligned}
$$

Por tanto la estatura, en centímetros, de los trabajadores es mayor igual que 55 pero menor que 75.

8) Note que $|x-\mu|>h\sigma$ si $x-\mu>h\sigma$ y $x-\mu<-h\sigma$.

Para

$$
\begin{aligned}
& x-\mu>h\sigma \\
\Leftrightarrow & x>h\sigma+\mu
\end{aligned}
$$

Para

$$
\begin{aligned}
& x-\mu<-h\sigma \\
\Leftrightarrow & x<-h\sigma+\mu
\end{aligned}
$$

Por tanto la los valores de x tales que $|x-\mu|>h\sigma$ satisfacen que

$$x\in\left]-\infty,-h\sigma+\mu\right[\cup\left]h\sigma+\mu,\infty\right[$$

Fuentes consultadas

Ávila, J. (2003). *Álgebra y Trigonometría*. Cartago: Editorial Tecnológica.

Barrantes, H. (2005). *Introducción a la Matemática*. San José, Costa Rica: EUNED.

Barrantes, H. (2010). *Matemática Básica para Administración*. San José, Costa Rica: EUNED.

Chacel, R. (s. f.). George Polya. Estrategias para la resolución de problemas. Recuperado de http://ficus.pntic.mec.es/fheb0005/Hojas_varias/Material_de_apoyo/-Estrategias%20de%20Polya.pdf

Goodman, A. y Hirsch, L. (1996). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México: Prentice Hall.

Larson, R. y Hostetler, R. (2010). *Precálculo* (7.ª ed.). México, D. F.: Editorial Reverté S. A.

Ministerio de Hacienda (2017). Impuesto sobre la renta (régimen tradicional). Recuperado de http://www.hacienda.go.cr/contenido/12994-regimen-tradicional

Murillo, M., Soto, A. y Araya, J. (2003). *Matemática básica con aplicaciones*. San José, Costa Rica: EUNED.

Paul, R. y Haeussler, E. (2003). *Matemáticas para administración y economía* (10.ª ed.). México: Pearson.

Ruiz, A. (2003). *Historia y Filosofía de las matemáticas*. San José, Costa Rica: EUNED.

Sullivan, M. (2013). *Álgebra y Trigonometría* (9.ª ed.). México, D. F.: Pearson.

Zill, D. y Wright, W. (2011). *Cálculo. Trascendentes tempranas* (4.ª ed.). México, D. F.: McGraw-Hill.